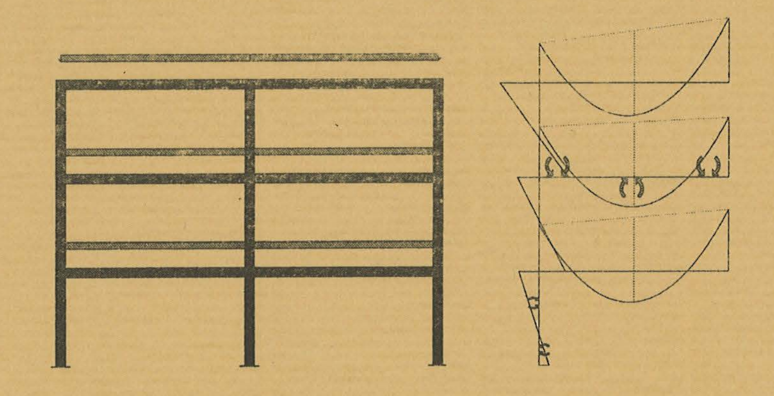
ANÁLISIS LINEAL DE PÓRTICOS DE EDIFICACIÓN (y II)

por

José Ignacio Hernando García

Jesús Ortiz Herrera



CUADERNOS DEL INSTITUTO JUAN DE HERRERA DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

ANÁLISIS LINEAL DE PÓRTICOS DE EDIFICACIÓN (y II)

por

JOSÉ IGNACIO HERNANDO GARCÍA
JESÚS ORTIZ HERRERA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Análisis lineal de pórticos de edificación II

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 87.01
ISBN: 84-95365-58-8 (obra completa)
ISBN: 84-95365-60-X (Análisis lineal de pórticos de edificación II)
Depósito Legal: M-43859-2000

2.6 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES EN EL MÉTODO DE EQUILIBRIO

En estas lecciones se ha utilizado previamente el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.) en una de sus aplicaciones conocida por el alumno, el TEOREMA DE LA CARGA UNIDAD. En este teorema, como movimientos y deformaciones, compatibles entre sí, se toman las del "estado real" de la estructura, y como "estado virtual" se toma un sistema de acciones y solicitaciones, equilibradas entre sí, elegido adecuadamente para el propósito de calcular un determinado movimiento del "estado real" de la estructura.

Posteriormente, en el apartado 2.4 se han formulado, como ejercicio puramente algebraico, los trabajos virtuales externo (W_{ext}) e interno (W_{int}) resultantes de adoptar como "sistema estático" las acciones y solicitaciones (**f**, **s**) del "estado real" de la estructura, que naturalmente deben cumplir las ecuaciones de equilibrio del problema ($\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$); y como "sistema cinemático" los movimientos y deformaciones (**u**, **e**) de un "estado virtual" elegido arbitrariamente, con la única condición de cumplir las ecuaciones de compatibilidad ($\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$). Se comprobó la igualdad $W_{ext}\equiv W_{int}$ en el caso particular considerado.

Allí se introdujeron las expresiones $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}$ y $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$, que por ser **f, s, u, e** "vectores" (matrices de una sola columna), simplemente expresan que el trabajo virtual externo (W_{ext}) es la suma $\sum f_i \cdot u_i$ (suma de los productos de cada término del vector de acciones por el correspondiente término del vector de movimientos), y que el trabajo virtual interno (W_{int}) es la suma $\sum s_j \cdot e_j$ (suma de los productos de cada término del vector de solicitaciones por el correspondiente término del vector de deformaciones). Estas expresiones son válidas, lógicamente, sólo si los términos f_i y u_i se ordenan de manera "correspondiente" (desde el punto de vista del trabajo mecánico) en **f** y **u**; y análogamente para los términos de **s** y **e**.

Puesto que las expresiones $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}$ y $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$ son básicas para la validez de las demostraciones incluidas al final del presente apartado, se deduce la regla de "correspondencia" en la ordenación de los términos de los vectores antedichos, y por lo tanto de las ecuaciones que los ligan, regla que se introdujo en un aparado precedente y que ahora se justifica.

La expresión $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}=\sum f_i \cdot u_i$ permite generalizar el concepto de "acción" (f_i) a cualquier magnitud estática, o conjunto de ellas, que "trabajan por" efecto de un cierto movimiento u_i. Esta generalización es importante en el análisis de pórticos desplazables de edificación, para los cuales, tal como se verá en apartados posteriores, frecuentemente se ligan determinados movimientos (por ejemplo, el desplazamiento horizontal u_i de todos los nudos de una misma planta), y como consecuencia de ello la acción f_i puede incluir varias fuerzas aplicadas a la estructura.

Por otra parte, en los apartados previos dedicados a estructuras intraslacionales, se ha encontrado, por formulación directa de las matrices de equilibrio (**H**) y de compatibilidad (**B**), que ambas son transpuestas entre sí ($\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$; $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$).

En el presente apartado se demuestra, aplicando el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES, que dicha propiedad es general (dentro de la teoría de primer orden), lo que tiene una enorme trascendencia en la aplicación práctica del método de equilibrio. En efecto, como consecuencia de dicha propiedad ($\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$; $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$), no es necesaria la doble formulación explícita de las ecuaciones de equilibrio ($\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$) y de las ecuaciones de compatibilidad ($\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$) de cada problema, puesto que de uno de los sistemas de ecuaciones (por ejemplo, el de las ecuaciones de equilibrio), se infiere el otro (las ecuaciones de compatibilidad; o viceversa).

En las presentes lecciones se considera como objetivo docente prioritario saber formular explícitamente las condiciones de equilibrio de cada problema, como forma didáctica de continuar, incluso para las estructuras hiperestáticas, trabajando sobre las condiciones de equilibrio en tanto que herramientas fundamentales del análisis de estructuras, cuya estabilidad depende ante todo de que no se vulnere ninguna de dichas condiciones.

La relación $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$ es una alternativa obvia para hacer de las ecuaciones de equilibrio las fundamentales del análisis de estructuras hiperestáticas de barras, ya que éstas pueden formularse con sencillez e incidiendo en conceptos que se han puesto en práctica previamente en el análisis de las estructuras isostáticas. Una vez escritas las ecuaciones de equilibrio, de la matriz **H** correspondiente se infiere automáticamente la matriz de compatibilidad **B** por una simple transposición de filas por columnas.

De esta manera no es necesario, ni tan siquiera, formular explícitamente las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$; pero a lo largo de los diversos ejemplos se insiste en la necesidad de saber "interpretarlas" (se escriben las diversas filas de $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ y se verifica su coherencia geométrica sobre un dibujo de la deformada de la estructura), como procedimiento eficaz de:

- Comprobar que la matriz **B**, y por lo tanto también la **H**, son correctas.
- Comprender cómo se mueve y deforma cada tipo estructural.

Lógicamente es perfectamente válido partir de las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, extraer de las mismas la matriz **B**, y obtener **H** por transposición (o bien, directamente formar la matriz de rigidez $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$), siempre que se compruebe, dada su absoluta importancia, que las expresiones $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}$ son las ecuaciones de equilibrio correctas del problema.

La simetría de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad otorga a las mismas un carácter absolutamente dual en el formalismo de los métodos de equilibrio, aunque por razones diversas puede reforzarse más o menos el estudio de una de ambas familias de ecuaciones. Estas lecciones, aprovechando la formación previa del alumno en estática, y primando la enseñanza del equilibrio como condición fundamental de la seguridad estructural, se decantan por tomar las ecuaciones de equilibrio como ecuaciones de partida para el análisis hiperestático.

El estudiante de cursos de especialidad encontrará que en el cálculo de medios continuos por el método de elementos finitos, el método de equilibrio se aplica a la inversa: se formulan las ecuaciones de compatibilidad (si bien de manera sólo incompleta por utilizarse campos aproximados de movimientos, con un número finito de parámetros); y a partir de las mismas se infieren las de equilibrio (que consecuentemente tienen carácter aproximado). La expresión típica de la matriz rigidez de cada elemento finito responde al formato $\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$, con algunas variantes como la de una integración extendida al área o volumen del elemento.

Como consecuencia de la relación $\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$, dentro del análisis elástico lineal, en que la matriz constitutiva es siempre simétrica ($\mathbf{D}=\mathbf{D}^t$), también lo es la matriz de rigidez $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$, como se demuestra posteriormente. Las implicaciones prácticas de esta propiedad son importantes, ya que permite simplificaciones en el almacenamiento en memoria de dicha matriz y en los algoritmos de resolución de las ecuaciones $\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}$

A continuación se recuerdan las condiciones de aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES:

- Las solicitaciones y las acciones deben estar equilibradas (SISTEMA EQUILIBRADO)
- Las deformaciones y los movimientos deben ser compatibles (SISTEMA COMPATIBLE)
- El SISTEMA EQUILIBRADO y el SISTEMA COMPATIBLE pueden no tener relación de causa a efecto entre sí (de ahí el carácter "virtual", no real, de los trabajos).
- Indistintamente el SISTEMA EQUILIBRADO puede ser "virtual" y el SISTEMA COMPATIBLE "real", a la inversa, ambos "reales" o incluso ambos "virtuales".
- No se presupone el carácter elástico lineal del material, pudiendo existir términos de deformaciones de origen térmico o reológico, deformaciones anelásticas, etc.

  Así, el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES es aplicable para los materiales usuales de edificación en todas sus fases de comportamiento mecánico: en el hormigón armado, que exhibe deformaciones anelásticas diversas (fisuración, fluencia lenta, etc.); y en el dominio plástico de las piezas metálicas. Para nada se recurre en su demostración a la hipótesis de existencia de una función de "energía elástica", que como función de estado no puede de hecho definirse para los materiales no conservativos, sin que ello invalide la aplicación del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

- Los movimientos deben ser infinitesimales (hipótesis de "pequeños" desplazamientos).

Seguidamente se enuncian y demuestran, dentro del formalismo del método de equilibrio (variables **f**, **s**, **u**, **e**; matrices **H**, **B**), los "teoremas directo y recíprocos" de los trabajos virtuales, de los que resultan las propiedades anteriormente expuestas. Asimismo se demuestra la simetría de la matriz de rigidez dentro del análisis elástico lineal.

Teorema "directo" de los trabajos virtuales: Si se cumplen las ecuaciones de equilibrio $\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$, las de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{e}$ infinitesimales, y $\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$, se verifica la igualdad de los trabajos virtuales externo (W_{ext}) e interno (W_{int}).

Demostración:

$W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{H}\cdot\mathbf{s})^t\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s})^t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{s}^t\cdot(\mathbf{B}^t)^t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}=W_{int}$, ya que para deformaciones infinitesimales $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$

Primer teorema "recíproco" de los trabajos virtuales: Si se cumple $W_{ext}=W_{int}$ para cualesquiera deformaciones y movimientos infinitesimales compatibles ($\mathbf{e}=\mathbf{B}\mathbf{u}$), entonces las solicitaciones y las acciones verifican $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}$

Demostración:

$\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}=W_{ext}=W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}$ implica que $\mathbf{f}^t=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{B}$, de donde $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}$.

Corolario: $\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$, como se deduce identificando entre sí las expresiones $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}$ y $\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$ con $\mathbf{f}$ y $\mathbf{s}$ arbitrarios.

Segundo teorema "recíproco" de los trabajos virtuales: Si se cumple $W_{ext}=W_{int}$ para cualesquiera solicitaciones y acciones equilibradas ($\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$), entonces las deformaciones y movimientos, supuestos infinitesimales, verifican $\mathbf{e}=\mathbf{H}^t\cdot\mathbf{u}$

Demostración:

$\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}=W_{int}=W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{H}\cdot\mathbf{s})^t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{H}^t\cdot\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{s}$ implica que $\mathbf{e}=\mathbf{H}^t\cdot\mathbf{u}$

Corolario: $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$, como se deduce identificando las expresiones $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ y $\mathbf{e}=\mathbf{H}^t\cdot\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{e}$ arbitrarios.

Para movimientos no "pequeños", se cumplen las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{H}^t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{e}$ representan movimientos y deformaciones "pequeñas" (infinitesimales) a partir de un estado previo de deformación de la estructura.

Los tres teoremas anteriores se expresan de un modo más compacto como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^t \Leftrightarrow W_{ext} = W_{int}$$

Simetría de la matriz de rigidez dentro del análisis elástico lineal: Al ser $\mathbf{D}=\mathbf{D}^t$, transponiendo la matriz de rigidez $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$ se encuentra ella misma: $(\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B})^t=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}^t\cdot(\mathbf{B}^t)^t=\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$

2.7 PÓRTICOS DESPLAZABLES.

Se definen como pórticos desplazables aquellos cuyo análisis por el método de equilibrio no puede formularse despreciando los desplazamientos (u, v) de sus nudos. Es decir, por definición, los grados de libertad de dichos pórticos deben incluir tanto giros como desplazamientos de todos o parte de sus nudos.

En principio todo pórtico de edificación debe considerarse como "desplazable": la utilización de un modelo de análisis intraslacional para casos que no reunan las correspondientes condiciones de aplicación, constituye no sólo un grave error de concepto, sino también la causa de resultados que pueden llegar a ser absolutamente erróneos.

Ya que abordar directamente el caso general de análisis "con desplazamientos" podría dificultar seriamente la comprensión de los métodos de equilibrio, por razones didácticas, se comienza clásicamente su estudio por los modelos intraslacionales.

También por razones didácticas, el reconocimiento de los tipos estructurales a los que son aplicables dichos modelos se orienta de manera inductiva, estudiando casos particulares típicos en la edificación donde sí son aplicables. Así, se avanza gradualmente en el conocimiento de los tipos específicos más importantes de estructuras flectadas.

Al comenzar el estudio de las estructuras intraslacionales (sección 2.1) se remitió al presente apartado para la formulación de un criterio general de aplicación de dichos los modelos. El eventual incumplimiento del criterio obliga, lógicamente, a considerar la estructura como "desplazable" a efectos de su análisis por el método de equilibrio.

Este criterio general de intraslacionalidad se puede enunciar de la manera siguiente:

- Condición "suficiente" de intraslacionalidad: Un pórtico "es" intraslacional si, prescindiendo de los voladizos y suponiendo todos los nudos articulados, no se obtiene un mecanismo ni una estructura crítica, y si, además, pueden considerarse nulos o despreciables los alargamientos axiles de su barras. Normalmente en los pórticos adecuadamente arriostrados puede admitirse el cumplimiento de este criterio, salvo la discusión del efecto de la elongabilidad de los arriostramientos que se ilustra mediante el ejemplo del apartado 2.9.

PÓRTICO DESPLAZABLE

q=35kN/m

a b

L=6m
h=0.5m; b=0.3m

$E=3.0e7\,\frac{kN}{m^2}$

H_1=3.0m
0.3x0.3

H_2=2.5m
0.3x0.3

ESTADO [f]

q

a b

$\frac{qL^2}{12}$ $-\frac{qL^2}{12}$

ESTADO [u]

a b φ_3 φ_4 φ_2 φ_1 φ_5 φ_6

a b m_2 m_3 m_4 m_5 m_1 m_6

VARIABLES

Nudos		Barras	
θ_a	m_a	φ_1	m_1
θ_b	m_b	...	...
u_{ab}	f_{ab}	φ_5	m_5

$$u=\begin{bmatrix}\theta_a\\ \theta_b\\ u_{ab}\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}m_a\\ m_b\\ f_{ab}\end{bmatrix}\quad e=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \dots\\ \varphi_5\end{bmatrix}\quad s=\begin{bmatrix}m_1\\ \dots\\ m_5\end{bmatrix}$$

EQU m_a. $-m_3$ $-\frac{qL^2}{12}$ (=-105) $-m_2$

$$m_a=m_2+m_3$$
$$m_a=-105\ \text{kN·m}$$

EQU m_b. $-m_4$ $\frac{qL^2}{12}$ (=105) $-m_5$

$$m_b=m_4+m_5$$
$$m_b=105\ \text{kN·m}$$

EQU f_{ab}. V_2 V_5

$$f_{ab}\text{-}V_2\text{-}V_5=0$$
$$f_{ab}=\frac{m_1+m_2}{3.5}+\frac{m_5+m_6}{2.5}$$
$$f_{ab}=0$$

m_2 V_2 m_5 V_5 V_1 m_1 V_6 m_6

$$V_2=\frac{m_1+m_2}{3.5}\qquad V_5=\frac{m_5+m_6}{2.5}$$

$$f=\begin{bmatrix}-105 & 105 & 0\end{bmatrix}^t$$

$$H=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{3.5} & \frac{1}{3.5} & 0 & 0 & \frac{1}{2.5} & \frac{1}{2.5}\end{bmatrix}$$

COM

$\frac{u}{3.5}$ θ_a φ_1 φ_2 $\frac{u}{2.5}$ θ_b φ_6 φ_5

$$\varphi_1=\frac{1}{3.5}u_{ab}$$
$$\varphi_2=\theta_a+\frac{1}{3.5}u_{ab}$$
$$\varphi_3=\theta_a$$
$$\varphi_4=\theta_b$$
$$\varphi_5=\theta_b+\frac{1}{2.5}u_{ab}$$
$$\varphi_6=\frac{1}{2.5}u_{ab}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3.5}\\ 1 & 0 & \frac{1}{3.5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2.5}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2.5}\end{bmatrix}$$

ECO

$$\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_s}{3.5} & \frac{2EI_s}{3.5}\\ \frac{2EI_s}{3.5} & \frac{4EI_s}{3.5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}m_3\\ m_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_v}{6} & \frac{2EI_6}{6}\\ \frac{2EI_v}{6} & \frac{4EI_v}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}m_5\\ m_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_s}{2.5} & \frac{2EI_s}{2.5}\\ \frac{2EI_s}{2.5} & \frac{4EI_s}{2.5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_5\\ \varphi_6\end{bmatrix}$$

$$D=10^4\begin{bmatrix}2.314 & 1.157 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1.157 & 2.314 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6.250 & 3.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3.125 & 6.250 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.240 & 1.620\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.620 & 3.240\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$f=H\cdot s$$
$$=B^t\cdot s$$
$$=B^t\cdot D\cdot e$$
$$f=B^t\cdot D\cdot B\cdot u$$

$$K=B^t\cdot D\cdot B$$

$$K=10^4\begin{bmatrix}8.564 & 3.125 & 0.9918\\ 3.125 & 9.490 & 1.944\\ 0.9918 & 1.944 & 2.122\end{bmatrix}$$

$$u=K^{-1}\cdot f=\begin{bmatrix}-0.001811\\ 0.001882\\ -0.0008782\end{bmatrix}$$

$$s=D\cdot B\cdot u$$

$$s=[-29.7,-50.6,-54.4,61.1,43.9,13.4]^t$$

DIAGRAMA DE M (kN m)

50.6[u+f]	-43.9[u+f]
-54.4[u]	61.1[u]
105[f]	-105[f]
-50.6[u+f]	43.9[u+f]
-50.6[u]	43.9[u]
0[f]	0[f]
-29.7[u+f]	13.4[u+f]
-29.7[u]	13.4[u]
0[f]	0[f]

-50.63 -50.63 -43.93 43.93 110.2 -13.43 29.67

DIAGRAMA DE V (kN)

-103.9 x=3.032 106.1 -22.94 22.94

DIAGRAMA DE N (kN)

-22.94 -106.1 -103.9

DESPLAZAMIENTOS (m)

-0.0008780 -0.0008780 0.004028

$$I_v=\frac{1}{12}\cdot 0.300\cdot 0.500^3=0.003125m^4\qquad EI_v=3\cdot 10^7\cdot 0.003125=93750kNm^2$$
$$I_s=\frac{1}{12}\cdot 0.300\cdot 0.300^3=0.000675m^4\qquad EI_s=3\cdot 10^7\cdot 0.000675=20250kNm^2$$

$$v=\frac{5qL^4}{384EI}+\frac{(M_3+M_4)L^2}{16EI}$$
$$v=\frac{1}{93750}\left(\frac{5\cdot 35\cdot 6^4}{384}+\frac{(-50.63-43.93)6^2}{16}\right)=0.004028m$$

Recuérdese que en estructuras de hormigón las flechas "reales" típicamente son del orden de dos a cuatro veces mayores que la flecha elástica

Figura 2.9: Pórtico desplazable.

- Condición "necesaria y suficiente" de intraslacionalidad: Un pórtico puede analizarse como intraslacional si y sólo si, además de ser nulos o despreciables los alargamientos axiles de su barras, el equilibrio de fuerzas de los nudos es posible hipotéticamente tomando esfuerzos cortantes nulos en todas sus barras (es decir, haciendo intervenir sólo los esfuerzos axiles N y las reacciones exteriores que puedan existir en cada nudo). Si existen cargas aplicadas en el interior de las barras (además de posibles cargas en los nudos), para verificar este criterio deben reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes aplicadas en los nudos extremos de cada barra. En el caso de pórticos no arriostrados, o arriostrados de una forma incompleta, debe observarse que ninguna de las circunstancias siguientes son, por sí solas o conjuntamente, "suficientes" para asegurar la intraslacionalidad:

  - Simetría de geometría, sustentación, constitución y acciones.
  - Inextensibilidad de las barras.
  - Cargas solamente gravitatorias.

  Para demostrar tal afirmación, considérese por un momento su contraria, y tómense como contraejemplos uno o varios de los ejemplos considerados en este texto, donde se analizan pórticos que son desplazables pero simétricos (pórtico a dos aguas del apartado 2.10), con barras supuestas inextensibles (los pórticos del presente apartado, por ejemplo), y/o con cargas verticales (el mismo pórtico a dos aguas antedicho, o el primero de los dos casos del presente apartado).

  Efectivamente, el primer pórtico desplazable que se analiza en este apartado (figura 2.9) se considera con una hipótesis de carga "vertical", a pesar de lo cual se determina un desplazamiento horizontal no nulo de sus nudos superiores.

La hipótesis de inextensibilidad, salvo en el caso de tirantes u otras barras con deformación axil no despreciable, se mantiene en general como una hipótesis simplificativa generalmente admisible y muy útil para reducir el número de grados de libertad de los modelos de análisis.

Ello es esencial para poder modelizar, con un número de parámetros reducido, las deformadas de pórticos simples clásicos en el estudio de la teoría de estructuras. Con un número de grados de libertad reducido son viables desarrollos sencillos, cuya formulación "manual" es indispensable para alcanzar los objetivos didácticos que se indican luego.

Posteriormente se explica que dichas técnicas de reducción de grados de libertad raramente se utilizan en el software actual de análisis de estructuras, ya que la capacidad y velocidad de los ordenadores actuales permiten cálculos con un elevadísimo número de variables, y resultan en general más sistemáticos y simples de programar los modelos que incluyen la totalidad de los grados de libertad.

Sin embargo se subraya que la utilización de los programas de análisis a modo de "caja negra" no puede suplir la etapa de aprendizaje, que de una manera u otra debe pasar por "entrar dentro de la estructura", para asimilar cómo trabajan los tipos estructurales básicos, y qué relaciones de causa a efecto se derivan de las diversas condiciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas.

Sin "saber" estas cuestiones básicas, el manejo del software de análisis de estructuras es tan peligroso como conducir un vehículo sin conocer las normas de circulación, como lo demuestra la enormidad de los errores de concepto que cada vez proliferan más en los proyectos con cálculos mecanizados de sus estructuras.

Sin embargo sí es cierto que "el valor añadido" de la enseñanza de la teoría de estructuras no incluye los aspectos puramente algebraicos o aritméticos del proceso de análisis, por lo que se propone y fomenta su resolución mediante aplicaciones informáticas simples (operaciones de álgebra matricial disponibles en pequeñas calculadoras, programas de matemática simbólica, etc.), como forma de "liberar" el análisis estructural propiamente dicho de tales aspectos.

Así, el énfasis de estas lecciones se pone en:

- Saber plantear todas las condiciones del análisis estructural de cada problema (equilibrio, compatibilidad y constitutivas).

- Saber interpretar críticamente los resultados del análisis, con los diagramas de esfuerzos y deformadas como eficaz forma de expresión de los mismos.

La formulación adoptada del método de equilibrio se ha elegido precisamente con objeto de separar de una manera clara las cuestiones antedichas (sin omitir ninguna de las mismas), de las puramente algebraicas o numéricas.

Pasando a considerar con detalle el caso analizado en la FIGURA 2.9, se observa que la hipótesis de inextensibilidad permite, siempre dentro de la teoría de primer orden (movimientos pequeños, teóricamente infinitesimales), suponer que:

- Los desplazamientos verticales de los nudos a y b pueden omitirse: en efecto, si se desprecian los acortamientos de los ejes de los soportes, puede demostrarse que dichos desplazamientos verticales son infinitésimos de segundo orden respecto de los desplazamientos horizontales u_a y u_b .
- $u_b \approx u_a = u_{ab}$, puesto que el alargamiento $\Delta L_{ab} = u_b - u_a$ se supone prácticamente nulo.

Así pues, de los seis movimientos posibles: u_a, v_a, θ_a (del nudo a), y u_b, v_b, θ_b (del nudo b), sólo se consideran tres incógnitas independientes entre sí: θ_a, θ_b, u_{ab} ; es decir, se trata de un problema analizable con sólo tres grados de libertad efectivos, que constituyen los términos del vector $\mathbf{u}^t=[\theta_a, \theta_b, u_{ab}]$. Con dichos parámetros queda definida la deformada del estado [u], que se ha representado en la figura con los sentidos considerados como positivos de cada variable (deformada "teórica"). Para un desarrollo metódico en materia de signos, es conveniente, como en cualquier problema de análisis, plantearlo suponiendo "positivas" las variables (ya sean cinemáticas o estáticas), dejando para el final del proceso la verificación de que los signos de los resultados finalmente obtenidos coinciden con los que por intuición del comportamiento de la estructura pueden y deben preverse desde el principio.

Así, en este caso, parece obvio que por efecto de la carga aplicada en la viga, que va a provocar giros "hacia el centro" de la misma, los giros θ_a y θ_b sean respectivamente horario y antihorario, y que, en caso de desplazarse los nudos horizontalmente (como de hecho sucede), lo hagan hacia el lado que opone menor rigidez (hacia el lado cuyo soporte sea más flexible). Aunque efectivamente se verifica a posteriori lo antedicho, no se hace uso de ello a priori en la formulación de las ecuaciones del problema, pues ésta es la manera ordenada de plantearlas sin incurrir en errores en los signos de sus términos (lo cual es absolutamente esencial, como es lógico).

Una vez formuladas las variables cinemáticas $\mathbf{u}^t=[\theta_a, \theta_b, u_{ab}]$, el criterio de "correspondencia" (apartado 2.6), según el cual los términos f_i y u_i se ordenan de manera "correspondiente" desde el punto de vista del trabajo mecánico, indica que los términos de $\mathbf{f}$ son m_a, m_b, f_{ab}, siendo $m_a=-qL^2/12$, $m_b=qL^2/12$ (momentos nodales obtenidos igual que en una estructura intraslacional), mientras que f_{ab} debe obtenerse sumando todas las fuerzas "que trabajan" por efecto del desplazamiento $u_a=u_b=u_{ab}$ de la planta ab, es decir, todas las fuerzas horizontales que pudieran estar aplicadas en los nudos a y b y/o en la barra ab, más las posibles reacciones horizontales de los soportes en el estado [f], cuando sobre ellos actúan cargas perpendiculares a su directriz (este supuesto se considera en el ejemplo que sigue).

En este caso $f_{ab}=0$; pero resulta conveniente continuar el desarrollo del ejemplo tomando tanto para f_{ab} como para m_a y m_b valores sin especificar, reemplazándolos por los datos conocidos $\mathbf{f}^t=[-qL^2/12, qL^2/12, 0]$ en el momento de resolver las ecuaciones. De esta manera se asegura una vez más no trastocar signos de los términos de las mismas, lo que en este caso afectaría a los signos de los resultados $\mathbf{u}^t=[\theta_a, \theta_b, u_a]$ (como se deduce de la conservación del trabajo virtual $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}$), dificultando su interpretación final.

Puesto que no se consideran los alargamientos de las barras, en la expresión del trabajo virtual $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$ no intervienen los esfuerzos axiles N (cuyo trabajo virtual es $\sum N\cdot\Delta L=0$ al tomarse $\Delta L=0$ para todas las barras), por lo que las solicitaciones (s) y deformaciones (e) de las barras son las mismas que en los modelos intraslacionales; es decir, en este caso, $\mathbf{s}^t=[m_1, ..., m_6]$ y $\mathbf{e}^t=[\varphi_1, ..., \varphi_6]$, siempre ordenadas de manera "correspondiente" desde el punto de vista del trabajo mecánico.

La diferencia fundamental con las estructuras intraslacionales es que los giros "relativos" (φ) de las barras no coinciden en general con los giros "absolutos" (θ) de los nudos a los que se unen, como es obvio

al observar las deformadas representadas en la figura. La relación de todos ellos se obtendrá luego, al escribir las ecuaciones de compatibilidad.

Por ejemplo, considerando el soporte izquierdo, por giros "relativos" (φ_1, φ_2) se entienden los que se refieren al eje de la barra en su posición final (eje "corrotado"), mientras que los giros "absolutos" de los nudos (θ=0 en el empotramiento y $\theta=\theta_a$ en el nudo a) se refieren a los ejes generales fijos (x, z) de la estructura. Por lo tanto las ecuaciones de compatibilidad **e**=**B**·**u** cambian radicalmente con respecto a las de una estructura intraslacional. En este caso, al existir un desplazamiento (u_{ab}) perpendicular al eje de la barra, no coinciden los giros relativos con los absolutos, como puede apreciarse en la figura. Naturalmente en los dibujos los movimientos están muy amplificados, pero sus verdaderos valores se suponen "pequeños", lo que justifica el aproximar los ángulos (en radianes) por sus tangentes (así, por ejemplo, $\varphi_1=u_{ab}/3.5$m).

El uso de los giros "relativos" (φ) permite expresar las relaciones entre momentos y giros de las barras, **s**=**D**·**e**, exactamente igual que en el caso de los pórticos intraslacionales, tal como se indica en la figura.

En efecto, si se toma como eje de referencia de los giros del soporte izquierdo su propio eje en la posición final, en el caso de que dichos giros fueran nulos ($\varphi_1=\varphi_2=0$), la deformada de la barra sería recta (recuérdese que en el estado [**u**] no se consideran cargas aplicadas en el interior de las barras), y, por no existir curvaturas, también serían nulos los flectores M=EI·C. En suma, los momentos extremos serían m_1=-M(0)=0 y m_2=M(3.5)=0 para la barra en cuestión; lo cual es coherente con el resultado de aplicar **s**=**D**·**e**, cuando $\varphi_1=\varphi_2=0$. Esto no sucedería si como ejes de referencia se tomasen los ejes fijos de la estructura, ya que en el estado citado de deformada recta los giros serían $\varphi_1=u_{ab}/3.5\text{m}=\varphi_2$ y por lo tanto al aplicar **s**=**D**·**e** se obtendría $m_1 \neq 0 \neq m_2$, resultado absurdo en ausencia de flexión de la barra.

Para escribir las ecuaciones constitutivas **s**=**D**·**e** manejando en **e** los giros absolutos, es preciso incluir explícitamente los desplazamientos; y, por lo tanto, de acuerdo con $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$, en **s** aparecen también las fuerzas de extremo de barra. Aun siendo esto correcto (de hecho se trata del formalismo más divulgado del llamado cálculo "matricial" de estucturas, que puede seguirse en la bibliografía dada en el apéndice C), las dimensiones de las matrices resultan entonces excesivas para desarrollos manuales, desvirtuando en carácter sencillo e intuitivo del anterior planteamiento. Por otra parte la matriz **D** resulta entonces singular, denunciando ello que se están mezclando en las ecuaciones constitutivas movimientos de sólido rígido además de auténticas "deformaciones". Pero la condición de equilibrio de cada una de las barras que deben verificar las solicitaciones "equilibradas" **s** permiten descontar en $\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$ el trabajo debido a los movimientos de sólido rígido de cada barra, con lo cual se encuentra de nuevo que dichos trabajos pueden formularse tomando sólo en consideración los giros φ respecto de los ejes "corrotados".

Por las razones expuestas en el apartado 2.6, en las presentes lecciones se considera como objetivo docente prioritario saber formular explícitamente las condiciones de equilibrio de cada problema, como forma didáctica de continuar, incluso para las estructuras hiperestáticas, trabajando sobre las condiciones de equilibrio en tanto que herramientas fundamentales del análisis de estructuras, cuya estabilidad depende ante todo de que no se vulnere ninguna de dichas condiciones.

La lectura de los términos de $\mathbf{f}^t=[m_a, m_b, f_{ab}]$ orienta claramente acerca de qué ecuaciones de equilibrio deben escribirse, y en qué orden. Resulta pues un procedimiento muy ordenado y sistemático; además de la forma indicada se obtiene una pauta del modo de proceder al enfrentarse por primera vez al estudio de un nuevo tipo estructural.

Se trata de escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes en la forma **f**=**H**·**s**, y extraer seguidamente de ellas la matriz de coeficientes **H** como pieza principal de este método de análisis.

Habiendo estudiado previamente los pórticos intraslacionales, las ecuaciones de equilibrio de momentos de los nudos a y b se escriben sin ninguna dificultad, tal como se indica en la figura.

La única novedad en las ecuaciones de equilibrio radica en la tercera ecuación (correspondiente a f_{ab}); es decir la que se obtiene expresando el equilibrio de fuerzas horizontales de la planta del pórtico, o "grupo cotraslacional" ab que incluye a todos los nudos que participan del mismo desplazamiento $u_a=u_b=u_{ab}$. Según se indica en la figura, resulta una sencilla ecuación de equilibrio $V_2 + V_5=f_{ab}$, donde intervienen los esfuerzos cortantes de los soportes, que como se ve son las solicitaciones que equilibrarían la posible fuerza horizontal exterior f_{ab}; al particularizar posteriormente f_{ab}=0 deberá resultar obviamente V_2=-V_5, pero de momento no se hace uso de esta condición (que sin embargo debe verificarse al final, como

parte de las condiciones de equilibrio del problema, además de las habituales condiciones de equilibrio de momentos de cada nudo).

Puesto que en el vector s se han tomado como variables independientes los momentos de los extremos de las barras, es preciso relacionar con ellos los cortantes V_2 y V_5. Para ello, el equilibrio de momentos de cada soporte, permite expresar su cortante V en función de sus momentos inferior y superior, reemplazándolos luego en la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales.

Se obtienen tres ecuaciones en las que intervienen como incógnitas sólo los momentos m_1, ..., m_6 de los extremos de las barras. La matriz de coeficientes, de 3 filas y 6 columnas, es la matriz de equilibrio **H**, indicada en la figura.

La relación general $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$ demostrada en el apartado 2.6 permite obtener automáticamente la matriz de compatibilidad **B** por una simple transposición de filas por columnas.

Por lo tanto no es necesario duplicar el trabajo de análisis deduciendo ahora explícitamente las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$. Pero sí es importante saber interpretarlas, es decir, saber escribir las diversas filas de $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ (ver figura) y verificar su coherencia geométrica sobre el dibujo de la deformada de la estructura. De esta manera:

- Se comprueba que la matriz **B**, y por lo tanto también la **H**, son correctas.
- Se visualiza cómo se mueve y deforma el pórtico objeto de este ejemplo.

Lógicamente es perfectamente válido partir de las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, extraer de las mismas la matriz **B**, y obtener **H** por transposición (o bien, directamente, formar la matriz de rigidez $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}$), siempre que se compruebe, dada su absoluta importancia, que las expresiones $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}$ son las ecuaciones de equilibrio correctas del problema.

Puesto que, por lo indicado, la matriz constitutiva **D** es la misma que la conocida de los modelos intraslacionales, y sigue siendo válida la cadena de sustituciones $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{s}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ (EQU-ECO-COM), resulta el sistema de ecuaciones típico del método de equilibrio, $\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}$, de donde se obtienen los movimientos $\mathbf{u}=\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{f}$, y a partir de ellos, los esfuerzos $\mathbf{s}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ del estado [u], que se completan sumándoles algebraicamente los esfuerzos $\mathbf{s}_f$ del estado [f], de manera análoga a lo ya puesto en práctica para estructuras intraslacionales.

Nótese que en todo este proceso, después de "almacenados en memoria" el vector de acciones nodales **f** y las matrices **H** y **D**, se opera exactamente igual que para estucturas intraslacionales. Para resolver el problema, basta manejar como "objetos" sucesivamente las matrices:

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}^t;\ \mathbf{K}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B};\ \mathbf{u}=\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{f};\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_f+\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$$

de las cuales, salvo a efectos de comprobación (como por ejemplo la matriz **B**, según lo ya indicado), basta solamente obtener explicitamente **u** y **s**, manejándose el resto de matrices simbólicamente (módulos operaciones de álgebra matricial disponibles en pequeñas calculadoras, programas de matemática simbólica, etc.).

De esta manera se trabajan explícitamente los conceptos básicos del análisis estructural (equilibrio, compatibilidad, ecuaciones constitutivas) y se libera de aspectos tediosos y que no forman parte propiamente del mismo, como son las operaciones puramente numéricas, sin caer en el manejo de "cajas negras" informáticas.

Una vez que esta técnica resulta familiar, los tiempos de análisis son muy cortos (y se centran en lo realmente importante), de manera que puede y debe dedicarse un tiempo, fundamentalísimo, para la comprobación de los resultados. Como mínimo, se deben realizar siempre las sencillas comprobaciones siguientes:

- Equilibrio de momentos de cada nudo

- Equilibrio de fuerzas horizontales de cada planta (para pórticos ortogonales de varias plantas; planta única en el ejemplo analizado).
- Equilibrio global del pórtico.
- Equilibrio de fuerzas de cada barra en direción de su eje y en dirección perpendicular.
- Carácter equilibrado del diagrama de flectores de cada barra
- Propiedades gráficas de los diagramas de esfuerzos, estudiadas en la teoría de vigas.
- Verificación del carácter "lógico" de los movimientos calculados, según consideraciones similares a las que para este ejemplo en particular se expusieron al principio de este apartado.
- Coherencia de las curvaturas de las barras (C) en la deformada final, con los signos de los flectores (M) en cada punto, según se desprende de la relación C=M/EI.

En la programación en ordenador de esta técnica de análisis, análogamente a lo indicado en apartados anteriores, las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ se dividen en cajas correspondientes a cada una de las barras, obviando áreas extensas de dichas matrices que para grandes estucturas están constituidas por ceros. La matriz de rigidez de la estructura ($\mathbf{K}$) se obtiene efectuando para cada barra los productos del tipo $\mathbf{B}_k^t\mathbf{D}_k\mathbf{B}_k$, y sumando o "ensamblando" entre sí las matrices así obtenidas.

Puede fácilmente relacionarse el formalismo aquí expuesto del método de equilibrio con otros más clásicos que pueden seguirse en la bibliografía mencionada en el apéndice C (métodos de Cross, "slope-deflection", "cálculo matricial", etc.). La lectura de esa bibliografía se recomienda enfáticamente como medio para adquirir la cultura propia de un universitario, en el sentido de comprender la enorme y rica diversidad de aproximaciones posibles a los distintos problemas, y aprender a relativizar enseñanzas que de otro modo prodrían parecer dogmáticas.

El método propuesto, que se sigue desarrollando en los apartados siguientes, se ha elegido por su operatividad, su economía conceptual (el mismo formalismo es útil para multitud de problemas, incluso de posibles futuros cursos de especialidad), pero sobre todo porque se manejan ineludiblemente los conceptos básicos de equilibrio y deformación de las estructuras analizadas, lo cual se pierde totalmente si los cálculos se reducen a la utilización más o menos eficiente de una herramienta informática "cerrada".

En la figura 2.10 se desarrolla un segundo ejemplo de análisis de un pórtico desplazable ortogonal de una sola altura, que permite generalizar algunos aspectos del análisis efectuado en el caso anterior.

En ambos ejemplos, análogamente a lo ya realizado en el estudio de las estructuras intraslacionales, cuando existen cargas aplicadas en puntos intemedios de las barras, el principio de superposición, válido dentro del análisis lineal, permite descomponer el estado real de la estructura en otros dos estados:

- Un primer estado de nudos empotrados [f], donde se aplican las cargas de las barras.
- Un segundo estado de nudos libres [u], con acciones sólo en los nudos

A diferencia de las estructuras intraslacionales, en el primer estado es preciso considerar tanto las fuerzas como los momentos de empotramiento, y en este segundo ejemplo ello resulta relevante para obtener la acción nodal f_{ab} equivalente sobre la planta ab.

Para ello, simplemente tanto las fuerzas como los momentos de empotramiento de las barras se aplican cambiados de signo a los nudos de la estructura, y se suman algebraicamente a las fuerzas y/o momentos directamente aplicados en los mismos, para obtener las acciones nodales equivalentes de la siguiente etapa.

Otro aspecto que difiere del primer ejemplo consiste en la existencia de un extremo de barra articulado, cuyo giro (φ_6) puede no considerarse como una variable independiente (puesto que, como se demostró en el

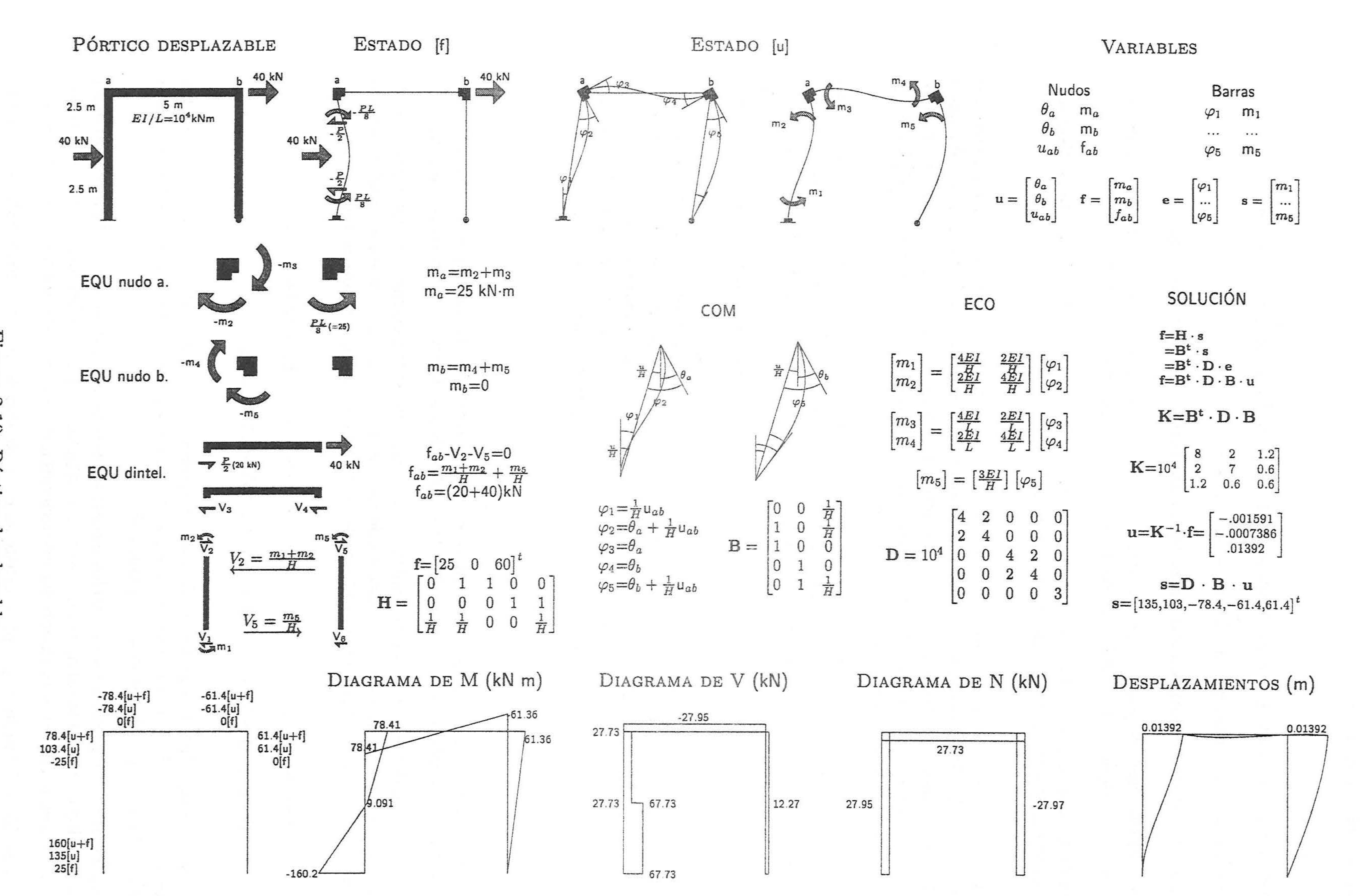


Figura 2.10: Pórtico desplazable.

apartado 2.2, está relacionado con el otro giro de la barra en la forma φ_6=-$\varphi_5/2$). El giro φ_6 no se incluye en el vector **e**, que en este segundo ejemplo pasa a tener sólo 5 términos. El momento m_6=0 tampoco se incluye en el vector **s**. Análogamente a lo que ocurría al considerar las barras con un extremo articulado que formaban parte de estructuras intraslacionales, debe adoptarse la rigidez equivalente 3EI/L, en lugar de la matriz "4-2-2-4".

Según lo ya conocido, como alternativa se podría haber tomado para la barra articulada del segundo soporte la matriz general "4-2-2-4", incluyendo tanto φ_6 como m_6 en **e** y **s** respectivamente; pero entonces también el giro θ del apoyo debería añadirse en **u** como un grado de libertad más, y por lo tanto sería necesario aumentar a 4 el número de ecuaciones de equilibrio, incorporando la correspondiente ecuación de equilibrio de momentos del nudo.

Finalmente, ambos ejemplos ponen de manifiesto que en pórticos desplazables no se cumple la sencilla regla de la "transmisión" de momentos a los empotramientos de los soportes en la cimentación (basta, para cerciorarse de ello, comparar los momentos obtenidos en dichos extremos con los que resultarían de aplicar dicha regla). En pórticos desplazables, dichos momentos deben obtenerse como un término más del vector $\mathbf{s}=\mathbf{s}_f + \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, tal como puede seguirse en los desarrollos de ambos ejemplos que se incluyen en las figuras. Este detalle es sumamente importante en los pórticos de edificación, porque típicamente los valores absolutos máximos de los momentos de los soportes se producen precisamente en sus empotramientos en cimentación.

2.8 PÓRTICOS ORTOGONALES DE VARIAS PLANTAS.

Se generaliza el formalismo del método de equilibrio expuesto en la sección anterior, en la que sólo se consideraron estructuras modelizables con un único desplazamiento además de los giros de los nudos, a estructuras con un número mayor de desplazamientos, como son las estructuras de edificación más comunes: los pórticos ortogonales de varias plantas.

El objetivo prioritario de estas lecciones, formular explícitamente los distintos sistemas de ecuaciones (equilibrio, compatibilidad y relaciones elásticas entre esfuerzos y deformaciones) necesarios en la resolución de cualquier problema hiperestático, limita la aplicación manual del método a estructuras de unas pocas plantas como la que sirve de ejemplo en este apartado (FIGURA 2.11).

El estudio de estructuras ortogonales porticadas con un elevado número de plantas y/o vanos se deja así para una lección posterior a las contempladas en el texto actual. Las adecuadas reducciones de grados de libertad, por condiciones de repetitividad, simetría y/o antimetría, permiten su análisis mediante modelos con pocas variables: modelos para los que puede utilizarse manualmente el formalismo propuesto en estas lecciones, preservándose el objetivo docente indicado. Naturalmente la mecanización en ordenador del método de equilibrio amplía enormemente el número de grados de libertad de las estructuras analizables.

Puesto que sigue aceptándose la hipótesis de inextensibilidad de las barras (para una discusión detallada de esta hipótesis véase el apartado 2.9) todos los desplazamientos de los nudos de las estructuras que se estudian en este apartado son horizontales; sin embargo el desarrollo que se expone sería totalmente válido si además de estos fuese necesario considerar las componentes verticales de los movimientos. Bastaría añadir los términos adecuados al vector **f**, de tal modo que el producto $\mathbf{u}^t\cdot\mathbf{f}$ evaluase convenientemente W_{ext} (según lo expuesto en la sección 2.6), y en consecuencia habría que considerar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas correspondiente a los nuevos elementos del vector de acciones nodales; puede seguirse un ejemplo al respecto en el apartado 2.10.

También se utiliza por primera vez el concepto de ANTIMETRÍA como alternativa para reducir significativamente el número de grados de libertad de algunos modelos estructurales. Se hará referencia a los resultados de la sección 2.2 relativos a la matriz equivalente $\mathbf{D}_{equ}$ de una viga con deformada antimétrica.

Examinando la deformada de la FIGURA 2.11, es claro que las vigas de este ejemplo responden al caso particular φ_1=φ_2 considerado en el apartado 2.2: los giros de los extremos izquierdo y derecho de cada viga coinciden en valor y en signo.

PÓRTICO DESPLAZABLE

2P b b'

2P a a'

EI=cte
L=cte

EQU m

-m3 -m5 -m2

$m_2+m_3+m_5=m_a=0$

EQU f_b

V_4

$V_4 = \frac{m_3+m_4}{H_2}$

$V_3 = \frac{m_3+m_4}{H_2}$

EQU f_a

V_3 V_2

$V_2 = \frac{m_1+m_2}{H_1}$

ESTADO [u]

b m_6 m'_6 b' m_4 m'_4 m_3 m'_3 a m_5 m'_5 a' m_2 m'_2 m_1 m'_1

-m6 -m4

$m_4+m_6=m_b=0$

P

$f_b - V_4 = 0$

$f_b = \frac{m_3+m_4}{H_2}$

$f_a = \frac{m_1+m_2}{H_1} - \frac{m_3+m_4}{H_2}$

$f_a - V_2 + V_3 = 0$

P

$f = [0 \quad 0 \quad P \quad P]^t$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{H_1} & \frac{1}{H_1} & \frac{-1}{H_2} & \frac{-1}{H_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo

P b

P a

COM

$\varphi_4 = \theta_b + \frac{u_b-u_a}{H_2}$

$\varphi_3 = \theta_a + \frac{u_b-u_a}{H_2}$

$\varphi_2 = \theta_a + \frac{1}{H_1}u_a$

$\varphi_1 = \frac{1}{H_1}u_a$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VARIABLES

Nudos

θ_a m_a
θ_b m_b
u_a f_a
u_b f_b

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ u_a \\ u_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \\ f_a \\ f_b \end{bmatrix}$

Barras

φ_1 m_1
... ...
φ_6 m_6

$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_6 \end{bmatrix}$

ECO

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} & \frac{2EI}{H} \\ \frac{2EI}{H} & \frac{4EI}{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$[m_5] = \left[\frac{3EI}{L/2}\right][\varphi_5]$$

$$\mathbf{D} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 14 & 12 & 0 & 6 \\ 2 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 24 & -12 \\ 6 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{f} = \frac{P}{EI}\begin{bmatrix} -L^2/5 \\ -L^2/10 \\ 4L^3/15 \\ L^3/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = PL\left[\tfrac{6}{5} \quad \tfrac{4}{5} \quad \tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5} \quad \tfrac{6}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right]^t$$

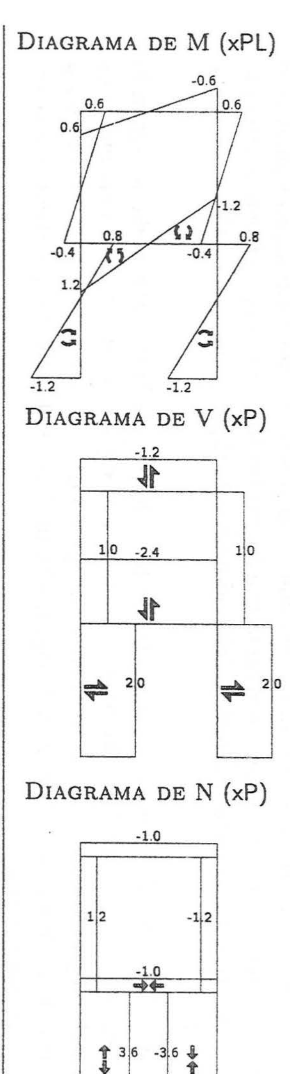


Figura 2.11: Pórtico ortogonal de varias plantas.

Para cualquier barra que cumpla esta condición, se tiene:

$$m_1 = \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 = \frac{6EI}{L}\varphi_1,$$

como ya se mostró en el apartado indicado. Esta relación es idéntica a la que existiría si se situase una articulación (ARTICULACIÓN VIRTUAL) en el punto medio de la viga. Para una barra de longitud L/2 con su extremo articulado, la rigidez equivalente según lo expuesto en el apartado 2.2 es precisamente:

$$\frac{3EI}{L/2} = \frac{6EI}{L}$$

Por este motivo en el ejemplo de la FIGURA 2.11 se puede analizar sólo media estructura.

El razonamiento anterior se basa en la noción de REPETITIVIDAD de las variables cinemáticas de la estructura (en este caso, la de los giros izquierdo y derecho de cada viga).

La simplificación del cálculo que ello permite (en caso de poder aplicarse) es tan notable, que a veces se aplica cuando se pretende obtener resultados de carácter sólo aproximado (no exactos). Aunque no se cumplan rigurosamente las condiciones φ_1=φ_2 en todas las barras se introducen estas articulaciones virtuales. Esta es la técnica utilizada para desarrollar los MODELOS APROXIMADOS para el análisis de pórticos típicos de edificación mediante SUBESTRUCTURAS.

Otra forma, basada en consideraciones físicas, de llegar al modelo indicado, se apoya en la ANTIMETRÍA (anti-simetría, o simetría negativa) del ejemplo. Observando la deformada de la estructura se aprecia que el punto central de las vigas no experimenta ningún movimiento vertical y su curvatura es nula (puesto que los movimientos y la curvatura de los situados a izquierda y derecha del mismo tienen signos contrarios). Recordando la relación entre flectores y curvaturas se deduce que el flector en dicho punto debe de ser nulo. Así, el modelo puede simplificarse sustituyendo las vigas por unas barras ficticias de longitud L/2 y con un apoyo deslizante "virtual" en el eje de antimetría del pórtico.

A la igual conclusión se llega considerando el flector como una pareja de momentos (dorsal y frontal) en las dos secciones de cada rebanada de las vigas. Cuando ésta coincide con el eje, si M$\neq$0, se tendrían dos momentos (el dorsal y el frontal) simétricos, en contra de la hipótesis de antisimetría. Por reducción al absurdo se deduce que debe ser M=0 en el eje medio. El mismo razonamiento permite deducir que N=0 en el eje medio. En cambio, suponer un cortante V$\neq$0 no es contradictorio con la hipótesis de antimetría, ya que la fuerza cortante dorsal es antisimétrica de la frontal ("una sube y la otra baja").

No debe extraerse la consecuencia de que el análisis de pórticos ortogonales desplazables puede efectuarse siempre suponiendo antimetría (del mismo modo que las diversas simplificaciones por simetría sólo pueden utilizarse en las condiciones adecuadas y con sumo cuidado para no incurrir en gravísimos errores conceptuales y numéricos). La simplificación por antimetría sólo es válida cuando se cumplen las condiciones siguientes:

- Simetría geométrica, de sustentación y de constitución.
- Acciones antimétricas, en el sentido luego indicado, como lo son las parejas de fuerzas horizontales P a cada lado del eje de simetría que pueden sustituir a la fuerzas 2P de la figura.

La antimetría es pues una propiedad específica de algunas estructuras como la de la FIGURA 2.11 (igual que ocurría con la simetría), pero es cierto que es frecuentemente "exportable" a muchos problemas de pórticos sometidos a acciones horizontales. Se ha elegido el ejemplo como "representativo".

La antimetría se define como el producto o encadenamiento de una transformación de simetría y una inversión de signo entre dos semi-estructuras: a toda magnitud (fuerzas, momentos, flechas, giros, etc.) de una mitad de la estructura, le corresponde en la otra mitad NO SU MAGNITUD SIMÉTRICA, SINO SU CONTRARIA.

La elección de los elementos de **f** es inmediata en virtud del criterio de "correspondencia", una vez dibujada la deformada de la estructura y definidas las variables cinemáticas (los giros θ_a y θ_b junto a los movimientos horizontales de los dinteles u_a y u_b), que se agrupan, como siempre, en el vector **u**. En la FIGURA 2.11 se han tomado como términos del vector de acciones nodales los momentos m_a y m_b de los dos nudos del modelo antimétrico y las fuerzas horizontales f_a y f_b que actúan sobre cada uno de los dinteles. De este modo el producto $\mathbf{f}^t \cdot \mathbf{s}$ representa el trabajo W_{ext}.

No se ha representado el estado [f] por ser trivial para el ejemplo propuesto. Al no existir acciones sobre las barras de la estructura todas las reacciones, solicitaciones, deformaciones, etc. de dicho estado son nulas. Las componentes del vector **f** son, por lo tanto, directamente las acciones aplicadas sobre los nudos, siguiendo las pautas generales expuestas en las secciones previas. Así, $m_a=m_b=0$, pero por las razones también ya expuestas (garantizar que no se cambian inadvertidamente los signos de alguna ecuación y consecuentemente de algún resultado) no se hará uso de estas condiciones hasta el momento de resolver el sistema de ecuaciones final. Del mismo modo el desarrollo se realiza tomando dos acciones horizontales genéricas f_a y f_b.

Debe notarse que en el modelo antimétrico adoptado se sustituyen las acciones "reales" aplicadas en los nudos situados a la izquierda de la estructura por unas acciones antimétricas, para lo cual se "traslada" la mitad de cada una de ellas al nudo frontal de cada dintel. Esta argucia, lícita para hacer uso en esta etapa del análisis de la simplificación por antimetría, debe ser reconsiderada en la fase final del proceso en la que, como se ha insistido, debe verificarse el equilibrio de cada nudo con las acciones "reales" que sobre él actuan. Con esta salvedad, el vector de acciones nodales que se adopta es $\mathbf{f}^t=[0, 0, P, P]$.

Las ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio de momentos de los nudos a y b son similares a las de cualesquiera de los ejemplos hasta aquí tratados. Asimismo la ecuación que expresa la condición de equilibrio de las fuerzas horizontales de la planta superior es idéntica a la expuesta en el apartado anterior, salvo que sólo interviene en ella un cortante, pues como es patente en la FIGURA 2.11 en el modelo antimétrico sólo se considera un soporte en cada planta.

Obsérvese que la articulación virtual de cada viga se comporta a todos los efectos como un apoyo deslizante, en el cual la reacción sólo puede tener componente vertical, por lo que en ningún caso intervendrá a la hora de plantear la condición de equilibrio según el eje horizontal. La citada componente vertical de la reacción de la articulación virtual no será nula, pues en otro caso el cortante en las dos vigas cancelaría, lo que a su vez implicaría flector constante y por tanto nulo: único modo de que se cumpla a la vez la condición de antimetría. Obviamente la reacción -acción- de media estructura es la acción -reacción- de la otra media, y representa por lo tanto el esfuerzo cortante que existe en dicha sección de la estructura "real".

La única novedad en las ecuaciones de equilibrio se encuentra al plantear la de la planta intermedia. En ella intervienen los cortantes de los soportes situados por encima y debajo de la planta, no sólo los inferiores como ocurría al expresar la condición de equilibrio de la planta superior (o las del único dintel de las FIGURAS 2.9 y 2.10).

Nuevamente hay que extremar las precauciones en materia de signos, siendo vital la distinción entre esfuerzos y fuerzas; de igual modo que al plantear las ecuaciones de equilibrio de momentos se insistió en la diferencia entre flectores y momentos. Las incógnitas consideradas son los cortantes de los soportes, que como se ha reiterado es conveniente suponer positivas, mientras que la ecuación que se escribe es de equilibrio de fuerzas. Así se justifica que las dos incógnitas V_2 y V_3 aparezcan en la ecuación de la figura con signos contrarios. Al plantear la condición de equilibrio según el eje horizontal, mientras debe tomarse la parte superior (frontal) de la primera rebanada del soporte superior, ha de considerarse la inferior (dorsal) de la última rebanada del soporte inferior. En definitiva f_a-V_2+V_3=0, y tras dejar en el lado izquierdo de la igualdad el término corespondiente al vector de acciónes nodales (de manera coherente con el sistema ecuaciones de equilibrio escrito de la forma $\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$) resulta $f_a=V_2-V_3$.

Las dos ecuaciones que expresan la condición de equilibrio de las plantas se han escrito como función de los cortantes de los soportes. Puesto que las componentes en el vector **s** son los momentos m_i en los extremos de las barras, deben sustituirse todos V_i por las expresiones que los relacionan con los momentos en los extremos de los soportes. El proceso puede seguirse en la figura y es similar al expuesto en ejemplos anteriores.

Una vez que las incógnitas de las cuatro ecuaciones de equilibrio son únicamente las seis componentes del vector **s**, la matriz del sistema (de cuatro filas y seis columnas) es la matriz **H** de equilibrio.

La matriz de compatibilidad **B** se obtiene por simple trasposición de la anterior según se dedujo en el apartado 2.6.

Aunque parezca superfluo escribir ahora las ecuaciones de compatibilidad, interpretarlas sirve para

verificar las ecuaciones de equilibrio y profundizar en el conocimiento de los movimientos y las deformaciones de las estructuras.

Las ecuaciones que expresan las condiciones de compatibilidad de los giros de las vigas (filas quinta y sexta de la matriz **B** de la figura) son tan triviales como las de las estructuras intraslacionales, por lo que no requieren nuevos comentarios. Las que expresan las condiciones de compatibilidad de los giros relativos del soporte inferior (filas primera y segunda de **e**=**B**·**u**) son idénticas a las de los pórticos de una sola planta estudiados en el apartado 2.7. La única novedad se encuentra en las ecuaciones que expresan la compatibilidad de giros de los extremos del soporte de la planta superior, que indican que los giros relativos son la suma del giro del nudo correspondiente (θ_a o θ_b) más el giro del eje del soporte. Este se estima, en primera aproximación, como el cociente entre movimiento relativo de la planta superior respecto de la inferior y la altura del soporte (tg($\alpha \equiv \alpha$ en radianes para ángulos pequeños), es decir (u_b-u_a)/H_2.

El razonamiento anterior sugiere tomar como variable cinemática independiente no el movimiento absoluto de la planta superior sino el relativo entre ambas plantas. De este modo las ecuaciones de compatibilidad (y por ende de equilibrio) se simplifican notablemente. Este camino se explora unas líneas más abajo.

Ya se ha justificado que las matrices constitutivas de las vigas son las $\mathbf{D}_{eq}$ correspondiente a una barra con deformada antimétrica deducidas en la sección 2.2, mientras que para los soportes deben considerarse la matriz estándar de 2x2 según se indicó en la sección anterior.

A partir de este punto, conocidas las matrices **H**, **B** y **D** y el vector de acciones nodales, el proceso es idéntico al seguido para cualesquiera de los tipos estructurales ya estudiados:

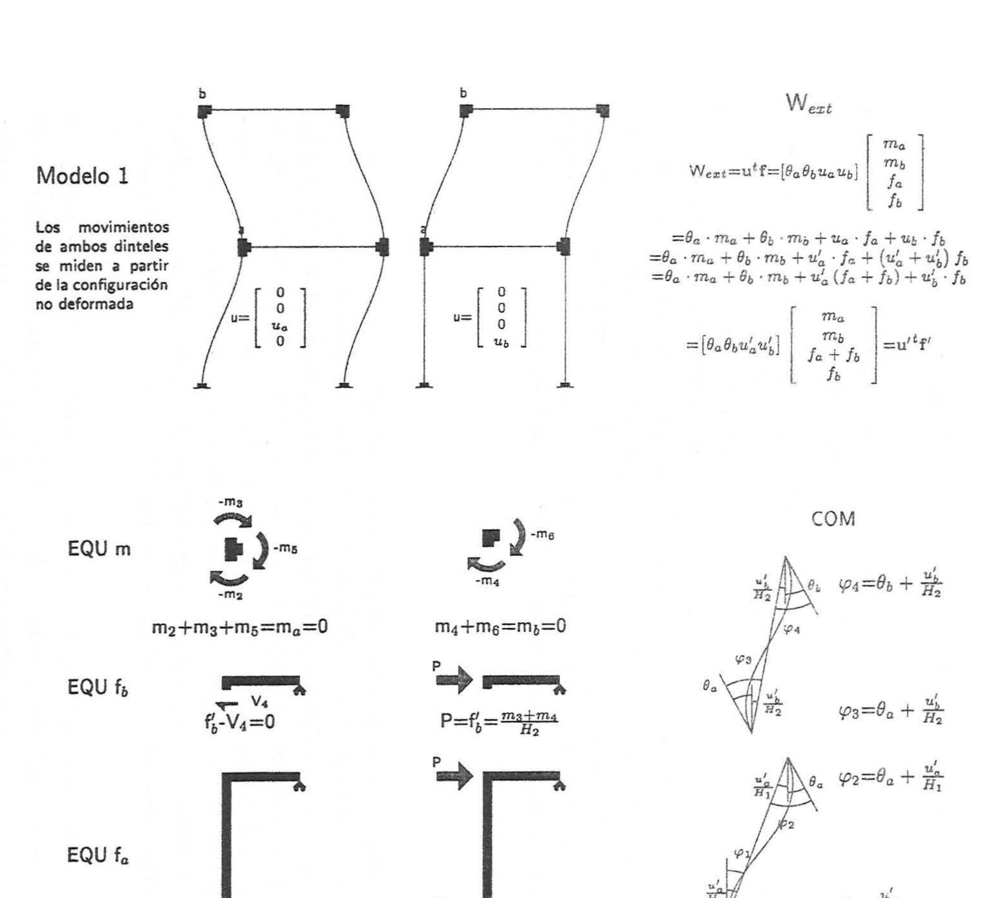
$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s_f} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

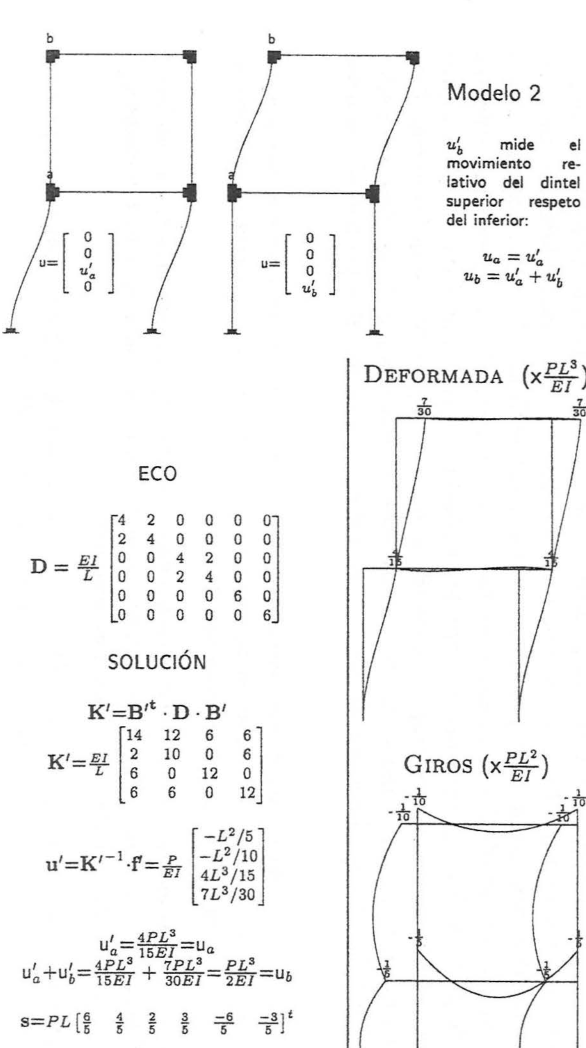
Obtenidos los momentos en los extremos de las barras pueden dibujarse los diagramas de flectores, a partir de estos los de cortantes y finalmente, por equilibrio de fuerzas de los nudos los de axiles.

Finalmente han de realizarse las sencillas comprobaciones que se señalan en la seccion 2.7 (equilibrio de momentos en los nudos, equilibrio global, etc.), prestando especial atención en este caso al equilibrio de fuerzas de cada nudo. Como se indicó al inicio del apartado para poder hacer uso de las condiciones de antimetría se traslado la mitad de las acciones de los nudos a y b a sus simétricos. Sin embargo la condición de equilibrio de los nudos debe, obviamente, verificarse con las acciones que actuan "realmente" sobre ellos. Así se entiende el axil en cada uno de los dinteles, que en rigor para un modelo antimétrico debía ser nulo según se justificó previamente (nótese que el valor de este axil es precisamente -P, lo que explica que sea lícito trasladar la mitad de la acción de los nudos a y b a sus simétricos, ya que hipótesis de inextensibilidad garantiza que la presencia o ausencia de dicho axil no modifique W_{int}).

Ya se ha mostrado en casos anteriores cómo modelizar una misma estructura de distintas formas: es obvio que en las estructuras simétricas o antimétricas podría no hacerse uso de estas condiciones, que en las estructuras con barras con un extremo articulado puede adoptarse un grado de libertad adicional asociado al giro del extremo en cuestión en lugar de utilizar la apropiada rigidez equivalente, o que, en definitiva, podrían asignarse tres grados de libertad (el giro y en general dos movimientos) a cualquier punto interior de la estructura. La discusión que sigue muestra un modo más sutil de obtener modelos diversos de una estructura. En lugar de modificar las variables cinemáticas que se consideran, se varía la medida que de ellas se realiza, o en otras palabras, se cambia el sistema de referencia respecto del que se miden.

Siguiendo la observación realizada al interpretar las ecuaciones de compatiblidad de la estructura de la FIGURA 2.11, en la FIGURA 2.12 se analiza la misma cambiando la variable cinemática u_b, que medía el movimiento del dintel superior referido al sistema global de referencia, por u'_b, que mide el mismo movimiento pero tomando como sistema de referencia uno que se traslada con el dintel inferior. Es decir, u'_b representa el movimiento relativo del dintel superior respecto del inferior.





P

$2P = f'_a = \frac{m_1+m_2}{H_1}$

V_2

$f'_a - V_2 = 0$

$$f' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2P \\ P \end{bmatrix} \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{H_1} & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{H_2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{H_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.12: Pórtico ortogonal de varias plantas.

La primera fila de la FIGURA 2.12 muestra las diferencias entre ambas descripciones cinemáticas para la estructura analizada. Se indican diversos modos de deformación de ambos modelos. Nótese que mientras en el modelo ya estudiado el estado definido por el vector de movimientos $\mathbf{u}^t$=[0, 0, 1, 0] representa una deformada en la que el dintel superior permanece en la situación original, un vector de movimientos con iguales componentes para el nuevo modelo $\mathbf{u}'^t$=[0, 0, 1, 0], representa una configuración radicalmente distinta de la estructura. En este caso ambas plantas tiene un movimiento "global" común. El estado $\mathbf{u}^t$=[0, 0, 1, 0] del primer modelo corresponde al $\mathbf{u}'^t$=[0,0,1,-1] del segundo y el estado $\mathbf{u}'^t$=[0,0,1,0] del nuevo modelo con la descripción original se escribiría como $\mathbf{u}^t$=[0,0,1,1].

Esta nueva interpretación cinemática de la estructura debe afectar al vector de acciones nodales. Como se probó en la sección 2.6 el producto $\mathbf{u}^t{\cdot}\mathbf{f}$, o el $\mathbf{u}'^t{\cdot}\mathbf{f}'$, debe evaluar el trabajo de las fuerzas exteriores, que obviamente será el mismo para ambos modelos.

Como es habitual el criterio de "correspondencia" permite identificar inmediatamente los términos del nuevo vector $\mathbf{f}'$. Nada nuevo hay que decir respecto a las componentes m_a, m_b y f_b, que serán las mismas del primer modelo. Respecto a la componente f'_a, se obtiene sin dificultad recordando que debe contener todas las fuerzas que trabajan cuando se produce el movimiento correspondiente del vector $\mathbf{u}'$. Es claro que $\mathbf{u}'^t$=[0,0,1,0] moviliza todas las acciones horizontales situadas sobre el dintel inferior, siendo por lo tanto $f'_a=f_a+f_b$.

A igual conclusión se llega en la figura mediante un ejercicio meramente algebraico. Se reescribe el W_{ext} del primer modelo en función de las variables cinemáticas del segundo, sin más que introducir el cambio de variables $u_a=u'_a$ y $u_b=u'_a+u'_b$, tal como se indica en la figura.

Sirva lo anterior de ejemplo clarificador de la afirmación del apartado 2.6 según la cual la expresión $W_{ext} = \mathbf{f}^t{\cdot}\mathbf{u} = \sum f_i{\cdot}u_i$ permite generalizar el concepto de "acción" f_i a cualquier magnitud estática, o conjunto de ellas, que "trabajan por" un cierto movimiento u_i.

El cambio en el vector de acciones nodales conlleva necesariamente el de las ecuaciones de equilibrio que se deben plantear. Así, para el nuevo modelo en lugar de la ecuación de equilibrio de fuerzas del dintel de la planta baja aislado, debe escribirse la del grupo cotraslacional formado por toda la estructura situada sobre dicho dintel. De este modo se da una interpretación desde la perspectiva estática (que se prima en estas lecciones) del cambio de variables cinemático que originó el nuevo modelo.

La formulación final se realiza en la figura sobre la base de las ecuaciones de equilibrio, obteniéndose del modo habitual la matriz $\mathbf{H}$. La matriz de compatibilidad $\mathbf{B}$ se obtiene por transposición de $\mathbf{H}$ y la interpretación de sus filas es inmediata a la luz de los párrafos anteriores.

Como se previó al discutir las condiciones de compatibilidad del primer modelo las matrices de compatibilidad y de equilibrio son más sencillas, pero a cambio los términos del vector $\mathbf{f}$ son más elaborados. De hecho, la necesidad de incluir en f'_a las acciones del propio dintel y las de la planta superior requiere un momento de reflexión, frente al carácter más sistemático del desarrollo del primer modelo.

Como se ve los vectores $\mathbf{s}$ y $\mathbf{e}$ no se modifican, por lo que tampoco lo hace la matriz $\mathbf{D}$.

El resto del proceso es idéntico al ya descrito varias veces. La única diferencia se encuentra al inspeccionar el nuevo vector de movimientos. No podía ser de otro modo, pues su cuarta componente representa ahora el movimiento relativo de la planta superior, como se verifica en la figura.

La relación entre los dos modelos pueden interpretarse, como se insinúa en la exposición, como un simple cambio de variables. Así, mediante el procedimiento general para cualquier cambio de variables que se enunciará en el apartado 2.10 se puede reproducir de un modo elegante y conciso la discusión anterior.

Se concluye este apartado en el que, entre otros aspectos, se trata el problema de la antimetría, recordando que cuando el eje de simetría de la estructura coincide con un soporte la simplificación propuesta deja de ser válida (de igual forma que en los problemas simétricos el planteamiento es radicalmente distinto si sobre el eje de simetría existe o no un soporte). En este caso la reducción por antimetría requiere sustituir el soporte por uno de rigidez mitad.

2.9 PÓRTICOS ARRIOSTRADOS.

Los objetivos del presente apartado son:

- Introducir en el formalismo desarrollado en las lecciones anteriores, donde se han considerado estructuras formadas exclusivamente por piezas flectadas, barras biarticuladas solicitadas sólo por esfuerzos axiles (N). Las modificaciones en el proceso de análisis seguido en apartados anteriores son muy sencillas y permiten ampliar los tipos estructurales analizables a una amplia variedad:
  - Pórticos ortogonales de una o varias plantas, arriostrados en todas o parte de ellas.
  - Estructuras atirantadas o colgadas mediante tirantes extensibles.
  - Estructuras flectadas en general en las que no se puedan considerar nulos o despreciables los alargamientos axiles de su barras. Este caso se explica luego, en el presente apartado.
  - Pórticos no ortogonales, en los que, independientemente de si admiten o no la hipótesis de inextensibilidad, ésta puede llegar a constituir, no una simplificación del modelo, sino más bien todo lo contrario. Para un estudio de esta cuestión, puede seguirse el pórtico no ortogonal analizado en el apartado 2.10
- Discutir la eficacia de los arriostramientos. Normalmente en los pórticos adecuadamente arriostrados puede admitirse que la condición de intraslacionalidad del apartado 2.5, en el cual no obstante se remitía a la presente lección para el estudio del efecto de la elongabilidad de los arriostramientos.

  Es obvio el interés práctico de esta cuestión, ya que la caracterización de un pórtico como intraslacional permite utilizar los modelos de análisis mucho más sencillos, ya estudiados en lecciones anteriores.

  También esta discusión es fundamental para cuestiones que trascienden del ámbito puramente lineal de este conjunto de lecciones, pero que se incluyen en el mismo curso de Análisis de Estructuras de Edificación: pandeo de soportes; métodos de cálculo plástico. A dichos efectos puede "exportarse" la caracterización o no de un pórtico arriostrado como intraslacional a que se llega en el presente apartado, ya que, a pesar de efectuarse en contexto elástico lineal, es perfectamente suficiente para dilucidar si en un pórtico dominan la rigidez de flexión de sus piezas o la rigidez de conjunto de sus arriostramientos, ante acciones horizontales diversas.

El ejemplo desarrollado en la figura 2.13 es muy simple, pero suficiente para los objetivos indicados.

Obviamente, se trata del mismo pórtico analizado en la figura 2.10, al que se le han incorporado dos diagonales; de este modo se pueden comparar los esfuerzos y movimientos ante las mismas acciones horizontales, y evaluar la mayor o menor incidencia de las diagonales añadidas.

Las diagonales se suponen de muy reducida rigidez a flexión frente al valor EI/L indicado en la figura, que corresponde al resto de las barras del pórtico. Por este motivo, sólo se considerará eficaz la diagonal traccionada, pues la diagonal comprimida pandear para un esfuerzo |N| muy reducido que se supone no altera el balance de fuerzas del modelo.

Este criterio (considerar sólo la familia traccionada de diagonales de arriostramiento, según el sentido supuesto de las acciones horizontales, que normalmente pueden actuar en los dos sentidos posibles), es habitual en el cálculo de arriostramientos, pero requiere un comentario de sus condiciones de aplicación:

- El pandeo de la diagonal comprimida debe producirse en el dominio elástico, y por lo tanto, sin deformaciones plásticas irreversibles
- El pandeo debe realmente producirse para compresiones muy pequeñas, de tal forma que al pandear la barra no puedan inducirse fenómenos dinámicos alarmantes.

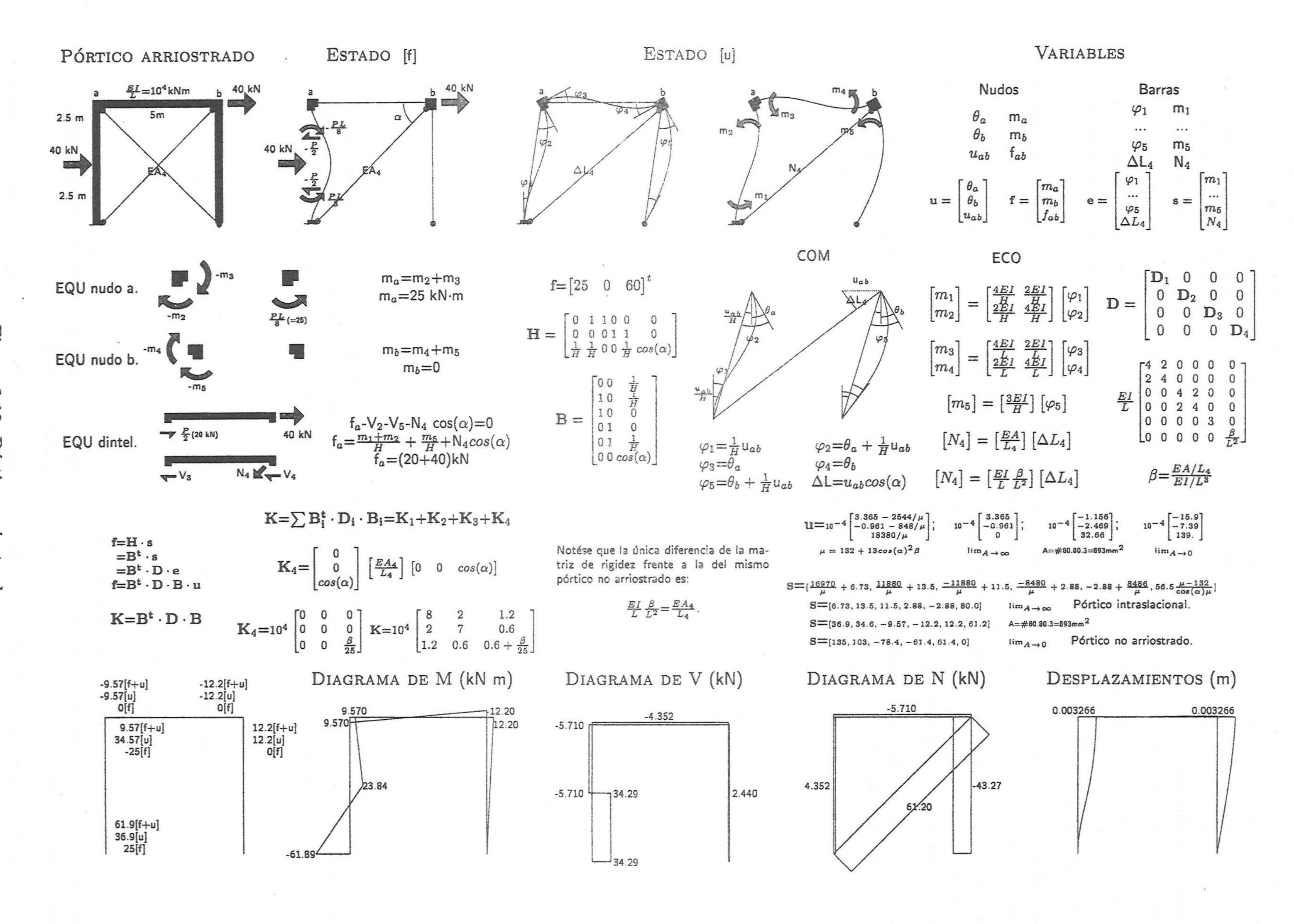


Figura 2.13: Pórtico arriostrado.

Puede suponerse que las condiciones anteriores se verifican cuando la esbeltez (λ) de las diagonales es lo suficientemente elevada, aunque sin sobrepasar lo límites normativos. Naturalmente, además, la diagonal comprimida no debe ser estrictamente "necesaria" para equilibrar las acciones exteriores (ya que en tal caso se produciría el colapso de la estructura); pero ello se cumple merced a existencia de la otra diagonal, traccionada, gracias a lo cual el pandeo de la diagonal comprimida se desarrolla por "acortamiento impuesto" limitado por el resto de la estructura. Así dicha diagonal comprimida simplemente abandona su directriz rectilínea de forma casi imperceptible, o por lo menos de manera reversible.

Comparando los desarrollos de las dos figuras 2.10 y 2.13, se observa que las variables nodales $\mathbf{f}^t$=[m_a, m_b, f_{ab}] y $\mathbf{u}^t$=[θ_a, θ_b, u_{ab}] son idénticas; la expresión del trabajo virtual "externo" $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}$ no se ve pues formalmente alterada.

Sin embargo, en el vector de solicitaciones (s) es preciso incluir la tracción de la diagonal, N_4 (donde el subíndice 4 hace referencia a dicha barra, la cuarta de la estructura).

En efecto, N_4 obviamente va a intervenir al formular la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales de la planta, que constituye la tercera fila del sistema $\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$ escrito en la figura. En la misma, el esfuerzo N_4 de la diagonal se incluye como último término de s.

En la ecuación de equilibrio citada, tal como se indica en la figura, aparece la componente horizontal de N_4, lo cual determina la aparición del coeficiente $\cos(\alpha)$ en la posición correspondiente de la matriz de equilibrio **H**. Con respecto a la matriz de equilibrio del apartado 2.7, se ha añadido una séptima columna cuyos términos son 0, 0 y $\cos(\alpha)$.

En el apartado 2.2 ha quedado clara la importancia del principio de los trabajos virtuales en la fundamentación del método de equilibrio, por lo que para preservar la expresión del trabajo virtual interno $W_{int}=s^t\cdot e$, cualquier término que se incorpore en s debe corresponderse con su término dual en e, y viceversa.

Del estudio de las estructuras trianguladas que precede (entre otras) a estas lecciones, se toma la expresión del trabajo virtual interno correspondiente a una barra articulada cualquiera: $N_k\cdot\Delta L_k$, siendo ΔL_k el alargamiento de la barra en el estado compatible. En este caso tanto N_4 como ΔL_4 corresponden al mismo estado "real" de la estructura, aunque como sabemos ello no es necesario en general en el formalismo de los trabajos virtuales.

Así pues, en este ejemplo se tiene:

$$s^t=[m_1, ..., m_6, N_4]$$

$$e^t=[\varphi_1, ..., \varphi_6, \Delta L_4]$$

$$W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}=m_1\cdot\varphi_1+...+m_6\cdot\varphi_6+N_4\cdot\Delta L_4$$

Al transponer la matriz de equilibrio, $\mathbf{B}=\mathbf{H}^t$, la última columna añadida en **H** se corresponde con una nueva fila (la última) en la matriz de compatibilidad, tal como consta en la figura. Si se denomina $\mathbf{B}_4$ a dicha fila correspondiente a la diagonal (cuarta barra de la estructura); se tiene:

$$\mathbf{B}_4=[0, 0, \cos(\alpha)]$$

Por lo tanto, tomando la última de las ecuaciones de compatibilidad $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, se puede escribir:

$$\Delta L_4=\mathbf{B}_4\cdot\mathbf{u}=0\cdot\theta_a+0\cdot\theta_b+\cos(\alpha)\cdot u_{ab}=u_b\cdot\cos(\alpha)$$

Esta ecuación de compatibilidad admite la sencilla interpretación geométrica (ver figura) de que el alargamiento ΔL_4 debe coincidir con la proyección sobre el eje de la diagonal del desplazamiento del nudo b al cual se une, ya que su otro extremo está fijo (apoyo inferior izquierdo).

Ello sirve, entre otras cosas, como comprobación de que son correctas la fila y columna añadidas respectivamente en **B** y **H**, con respecto a las matrices análogas del apartado 2.7. También permite

verificar una vez más la armonía entre las condiciones de equilibrio y compatibilidad en todo formalismo "bien temperado" de análisis estructural.

En las ecuaciones entre esfuerzos y deformaciones s=**D**·e, a las relaciones entre momentos (m) y giros relativos (φ) de las barras consideradas en el apartado 2.7, es preciso añadir aquí la relación entre los nuevos términos de s ye, es decir:

$$N_4 = \frac{EA_4}{L_4} \cdot \Delta L_4,$$

como se deduce de la expresión conocida $\Delta L_k = N_k\, L_k/EA_k$ del alargamiento de una barra biarticulada cualquiera.

Por lo tanto, en la matriz constitutiva **D** es preciso añadir la constante EA_4/L_4 en la posición correspondiente de su diagonal principal, tal como se indica en la figura.

Esto completa el conjunto de modificaciones del algoritmo de análisis con respecto al formulado en el apartado 2.7. El resto del proceso es formalmente idéntico:

$$\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B},\ \mathbf{u}=\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{f},\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_f+\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$$

También es posible ensamblar la matriz de rigidez de la estructura mediante la expresión ya conocida $\mathbf{K}=\sum\mathbf{K}_k$, siendo $\mathbf{K}_k=\mathbf{B}_k{}^t\cdot\mathbf{D}_k\cdot\mathbf{B}_k$ las contribuciones de cada barra, tal como se indica en la figura.

Para cualquier estructura flectada en la que se considere necesario o conveniente considerar los alargamientos axiles de todas o parte su barras, se puede proceder análogamente, incluyendo los correspondientes esfuerzos N_k en el vector s, los alargamientos ΔL_k en el vector **e**, y las constantes EA_k/L_k en las posiciones correspondientes de la diagonal principal de la matriz constitutiva **D**, como en el ejemplo aquí expuesto, aunque los esfuerzos N_k pertenezcan a barras flectadas cuyos momentos m_k también estén incluidos en s.

En efecto, la expresión $\Delta L_k = N_k\, L_k/EA_k$ del alargamiento de una barra biarticulada, es aplicable también a cualquier barra (flectada o no) solicitada por un esfuerzo normal N_k constante, como se deduce mediante la cadena de igualdades $\Delta L = \epsilon_0 \cdot L = (\sigma_0/E)\cdot L = (N/A)\cdot L/E = NL/EA$, donde por claridad se ha omitido el subíndice k de la barra, y se ha adoptado la expresión del alargamiento unitario del eje baricéntrico de la barra, $\epsilon_0 = N/EA$, válida dentro del análisis elástico lineal.

Un ejemplo de este proceso puede seguirse en el estudio del pórtico no ortogonal del apartado 2.10

Como límite, con el presente modelo de análisis es resoluble cualesquier estructura articulada, isostática o hiperestática.

Si todas las barras están biarticuladas, el vector de esfuerzos incluye solamente los esfuerzos normales N_k, el vector de deformaciones solamente contiene los alargamientos ΔL_k, y la matriz constitutiva **D** tiene como únicos coeficientes no nulos las rigideces axiles EA_k/L_k, en su diagonal principal.

Para una estructura articulada, la matriz **H** se deduce a partir del sistema de ecuaciones de equilibrio de fuerzas f_x y f_z de cada nudo, y aunque su formación es muy fácilmente programable, en este curso básico de análisis se pide saber escribir dichas ecuaciones de equilibrio una por una (tanto en la fase de planteamiento inicial del mismo como en la comprobación final de los resultados, que como mínimo debe incluir de nuevo la verificación de todas las condiciones de equilibrio del problema).

Volviendo al ejemplo del pórtico arriostrado de la figura 2.13, en la misma se ha incluido un parámetro adimensional

$$\beta = \frac{EA_4/L_4}{EI/L^3},$$

que se utiliza para relacionar la rigidez de los dos sistemas rigidizantes ante acciones horizontales "maclados" en esta estructura: solicitaciones axiles, especialmente la del tirante; y solicitaciones de flexión del resto de las barras.

Para simplificar en primera aproximación dicho estudio, se considera el caso de que la viga sea infinitamente rígida. Entonces $\theta_a=0=\theta_b$, y de la tercera fila de $\mathbf{f}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}$ se deduce:

$$f_{ab}=K_{31}\cdot\theta_a+K_{32}\cdot\theta_b+K_{33}\cdot u_{ab}=K_{33}\cdot u_{ab}$$

Por lo tanto, para el caso de ser la viga infinitamente rígida, el coeficiente $K_{33}=f_{ab}/u_{ab}$ mide la rigidez ante acciones horizontales.

Desarrollando la contribución de la barra diagonal a la matriz de rigidez de la estructura:

$$\mathbf{K}_4=\mathbf{B}_4{}^t\cdot\mathbf{D}_4\cdot\mathbf{B}_4$$

(donde, según lo ya expuesto anteriormente, $\mathbf{B}_4=[0,\ 0,\ \cos(\alpha)]$ y $\mathbf{D}_4=[EA_4/L_4]$), se encuentra la matriz $\mathbf{K}_4$ expresada en la figura, cuyo único término no nulo es:

$$K_{br}=\frac{EA_4}{L_4}\cdot cos^2(\alpha),$$

el cual se ensambla precisamente en la posición (3,3) de $\mathbf{K}$

Procediendo análogamente con el resto de las barras, se encuentra su contribución a K_{33} :

$$K_{fr}=2\frac{12\cdot EI}{L^3}=\sum\frac{12\cdot EI}{L^3},$$

donde la sumatoria se extiende únicamente a los soportes, y representa la rigidez de flexión (es decir, la rigidez del pórtico no arriostrado) para el caso de una viga infinitamente rígida. La rigidez del pórtico no arriostrado real será lógicamente inferior, dependiendo de la mayor o menor rigidez de la viga. Así, en el ejemplo del apartado 2.7 se obtuvo f_{ab}/u_{ab}=60 kN/0.01392 m=4310 kN/m, mientras que $24\cdot EI/L^3$=9600 kN/m (algo más del doble), rigidez que por las razones luego indicadas resulta conservadora a los efectos de evaluar la eficacia del arriostramiento.

Continuando con el caso de una viga infinitamente rígida (θ_a=0=θ_b) se tiene:

$$f_{ab}=K_{br}\cdot u_{ab}+K_{fr}\cdot u_{ab}=f_{br}+f_{fr},$$

donde $f_{br}=K_{br}\cdot u_{ab}$ es la parte de f_{ab} absorbida por el arriostramiento, y $f_{fr}=K_{fr}\cdot u_{ab}$ la parte de f_{ab} que produce flexiones en el pórtico. Despejando $u_{ab}=\frac{f_{ab}}{K_{br}+K_{fr}}$ y reemplazando en $f_{fr}=K_{fr}\cdot u_{ab}$, se encuentra:

$$f_{fr}=f_{ab}\frac{K_{fr}}{K_{fr}+K_{br}},$$

como es lógico, ya que la hipótesis simplificativa θ_a=0=θ_b reduce el número de grado de libertad a uno (u_{ab}), en cuyo caso, tal como se vio en la sección 2.3 (estructuras intraslacionales de un grado libertad) y se acaba de volver comprobar, la acción exterior se reparte proporcionalmente a las rigideces de los diferentes elementos o sistemas involucrados.

Como la expresión aproximada $K_{fr}=\sum 12\cdot EI/L^3$ sobrevalora K_{fr}, resulta efectivamente conservadora a efectos de estimar la parte de las acciones horizontales no absorbida por el arriostramiento (f_{fr}). Reemplazando los valores anteriores de K_{fr} y K_{br}, se puede pues escribir:

$$\frac{f_{fr}}{f_{ab}}\leq\frac{1}{1+\frac{\beta\cdot cos^2(\alpha)}{24}},$$

siendo $\beta=(EA_4/L_4)/(EI/L^3)$ en el ejemplo, y en general:

$$\beta=\frac{EA_{arr}/L_{arr}}{\sum EI/L^3},$$

donde para pórticos regulares de varias plantas, la sumatoria se extiende a todos los soportes de una planta típica o representativa, y EA_{arr}/L_{arr} corresponde también al arriostramiento de la misma planta.

Un criterio clásico en construcción metálica, recogido en los Eurocódigos, y obviamente razonable, consiste en considerar un pórtico como arriostrado si el arriostramiento reduce sus desplazamientos horizontales en, al menos, un 80 % . Según esto, el pórtico de la figura 2.13 NO podría considerarse como

adecuadamente arriostrado, ya que el desplazamiento obtenido es de 3.27 mm, que supera a 0.2·13.92 mm=2.78 mm, siendo 13.92 mm el desplazamiento del pórtico sin arriostrar (apartado 2.7).

Sin necesidad de analizar completamente los dos pórticos (el arriostrado y el no arriostrado), una forma conservadora de verificar dicho criterio consiste en limitar:

$$\frac{f_{fr}}{f_{ab}} \leq \frac{1}{1+\frac{\beta \cdot cos^2(\alpha)}{24}} \leq 0.2,$$

de donde $\beta \cdot \cos^2(\alpha)$ >96, o bien: $\beta \cdot \cos^2(\alpha)$ >100, CONDICIÓN CONSERVADORA PARA PODER CONSIDERAR "ARRIOSTRADOS" LOS PÓRTICOS REGULARES de una o varias plantas (pero, en principio, no más de 10). Como comprobación puede verificarse que tampoco se cumple en el ejemplo analizado ($\beta \cdot \cos^2(\alpha)$=33<100).

2.10 PÓRTICOS NO ORTOGONALES.

Para exponer cómo puede aplicarse el método de análisis estudiado en estas lecciones a los pórticos no ortogonales, se considera el ejemplo de la figura 2.14, correspondiente a un pórtico a dos aguas, biarticulado. Aunque se trata de un tipo particular de pórtico no ortogonal, muestra la manera apropiada de incluir en el análisis piezas inclinadas que pueden aparecer en otros tipos de pórticos muy diversos.

Además del objetivo indicado, el ejemplo que se analiza permite las siguientes enseñanzas de diseño estructural, "exportables" a otros casos que pueden plantearse:

- La directriz de la pieza no adopta, obviamente, la forma antifunicular de las cargas (que sería en este caso una parábola de segundo grado), pero hasta cierto punto puede considerarse una aproximación burda a dicha forma, haciendo concesiones a aspectos constructivos tales como el de conformar las fachadas y la cubierta con superficies planas, y constituir la estructura a base de piezas rectas. En este sentido, el pórtico a dos aguas puede considerarse como un "arco imperfecto", en el que aparecerán flexiones, por no coincidir su directriz con la línea de presiones. (En realidad eso sucede en mayor o menor grado en todo arco real, ya que la línea de presiones puede siempre variar por alternancias de cargas variables, y porque el eje de la pieza no es fijo, sino que experimenta desplazamientos que pueden producir flexiones de segundo orden a veces muy importantes, como en todo sistema comprimido). De todas formas, si se compara el diagrama final de flectores de este problema con el que correspondería a un pórtico simple ortogonal, se aprecia una notable reducción de los flectores máximos, si el pórtico está suficientemente peraltado. Relacionar el problema con conceptos de estática gráfica que se suponen previamente conocidos, permite interpretar y comprobar el diagrama final de flectores del dintel del pórtico, cuya forma debe coincidir con la diferencia de ordenadas de un arco parabólico (con arranques en los apoyos articulados) y la directriz poligonal realmente adoptada.
- La razón de ser de las articulaciones en cimentación se comprende bien si se analiza el mismo pórtico con empotramientos en su base, lo que se deja como ejercicio. El cociente e=M/N en las secciones inferiores de los soportes (que es cero en el pórtico biarticulado), adopta entonces valores considerables si las luces son medias-altas y las cargas de cubierta son ligeras, que es precisamente el campo típico de aplicación este tipo estructural. Puesto que el cociente "e" es la excentricidad de la reacción sobre la cimentación, se encuentra que el posible beneficio que se obtendría para la estructura, al hacerla más coaccionada en su base, se anula por el inconveniente de requerir cimentaciones desproporcionadamente anchas por razones de su estabilidad al vuelco. En cambio en el pórtico biarticulado las únicas reacciones son N (compresión) y V (cortante en la base del soporte) que son perfectamente asumibles si las reacciones horizontales se pueden anclar en la solera, o en su defecto si se equilibran mediante un elemento traccionado que una las bases de los dos soportes (adecuadamente protegido contra la corrosión, por quedar enterrado). Nótese que por equilibrio general de la estructura las dos reacciones horizontales son autoequilibradas (de igual

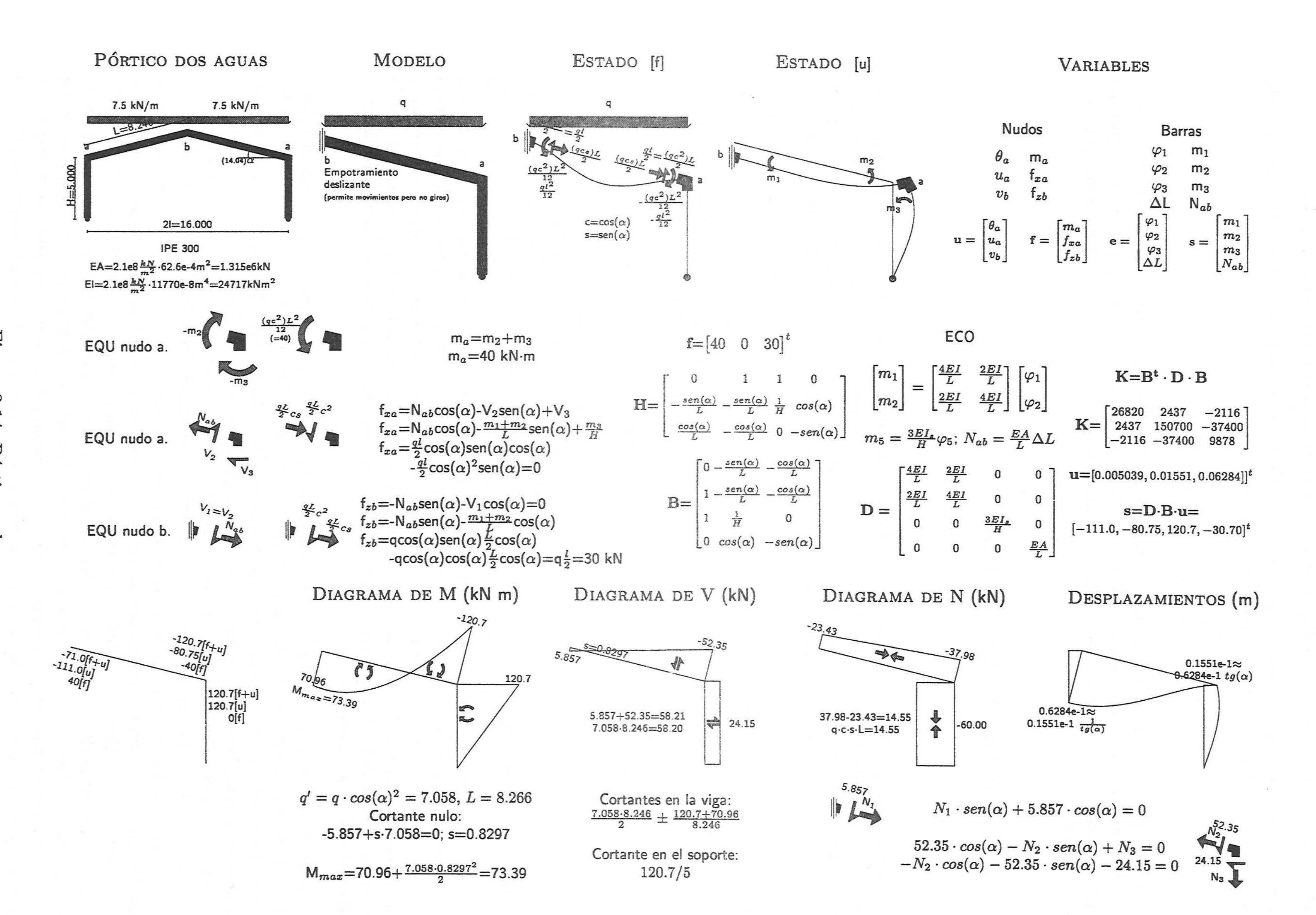


Figura 2.14: Pórtico a dos aguas.

valor absoluto y sentidos contrarios); únicamente las acciones horizontales originan una resultante horizontal neta, generalmente de menor entidad que las anteriores reacciones individuales de cada soporte debidas a las cargas verticales.

- Una tercera articulación (por ejemplo, en la clave), convertiría la estructura en isostática, lo que no impediría la aplicación de la misma técnica de análisis aquí expuesta, pero ofrecería alternativas más simples al quedar todos los esfuerzos y reacciones estáticamente determinados. Por comparación con los diagramas de flectores de los pórticos triarticulados, que se suponen estudiados con anterioridad a estas lecciones, puede observarse que los valores máximos son bastante similares. Pero en cambio el hiperestatismo reduce los movimientos de la estructura (lo cual es en general una constante del diseño de estructuras de edificación), y este aspecto puede ser determinante para el dimensionado de este tipo de estructuras de luces medias-altas, ya que las flechas y desplazamientos en general aumentan con la luz mucho más rápidamente que los esfuerzos de flexión. Además, con la rótula en clave se obtiene en general más una complicación que una simplificación constructiva, por lo que el pórtico triarticulado se emplea raramente, como en general los pórticos isostáticos, salvo circunstancias especiales (por ejemplo, asientos excepcionalmente elevados que no puedan combatirse con cimentaciones profundas, ya que los asientos no provocan solicitaciones si la estructura es isostática).

La discusión anterior deja claro que el pórtico biarticulado es una estructura de grado de hiperestatismo igual a uno, por lo que es un tipo estructural apropiado para analizarlo por el método de compatibilidad, lo cual se deja como ejercicio, como alternativa al método de equilibrio o "de la rigidez" aquí expuesto.

El análisis de este pórtico por el método de equilibrio se detalla en la figura 2.14, donde se siguen las diferentes etapas, muy sistemáticas, características de este método ya estudiado en las lecciones anteriores. Únicamente deben recordarse o destacarse algunos aspectos específicos, lo que se efectúa a continuación.

En la etapa [f], al estar las cargas referidas no a la longitud L de las piezas inclinadas, sino a su proyección horizontal L_x (tal como suele hacerse de hecho en la práctica) los esfuerzos de empotramiento perfecto coinciden con los de una hipotética viga empotrada horizontal de longitud L_x, como ya se vio en el ejemplo de la figura 2.7

El modelo adoptado en la figura hace uso de la simetría del problema para suponer que el desplazamiento horizontal de la clave u_b es cero, así como su giro θ_b, pero en modo alguno el desplazamiento vertical v_b, cuya omisión constituiría un gravísimo error de concepto y trastocaría dramáticamente todos los resultados. Tomar v_b=0 sólo estaría justificado si existiera un apoyo o un soporte (supuesto inextensible) que impidiera dicho desplazamiento vertical (Véase la discusión final del apartado 2.5).

Se plantea pues en la figura 2.14 un modelo de tres grados de libertad $\mathbf{u}^t=[\theta_a, u_a, v_b]$. Posteriormente se discute acerca de la conveniencia o no de aplicar la hipótesis de inextensibilidad del dintel para reducir el número de grados de libertad. Esta discusión se establece con carácter más académico que práctico, ya que la posible aplicación o no de la hipótesis de inextensibilidad (que, como toda hipótesis simplificativa es optativa, no obligatoria), en el caso de piezas inclinadas generalmente complica más que simplifica el análisis, por lo que su adopción carece en general de sentido práctico.

Sin embargo la supuesta inextensibilidad del soporte sí se ha aplicado, ya que el desplazamiento vertical v_a no se ha incluido en el modelo. En las aplicaciones informáticas, generalmente suele ser más sistemático incluir los movimientos u, v, θ de todos los nudos. En este ejemplo, no obstante, considerar v_a e ΔH en el modelo (que podrían, perfectamente, incorporarse) redundaría en una cierta pérdida de sencillez de la exposición, la cual se ha considerado prioritaria.

Como siempre, el número y carácter de las variables cinemáticas orienta acerca del número y naturaleza de las ecuaciones de equilibrio que deben formularse, y que se corresponden también con las acciones nodales $\mathbf{f}^t=[m_a, f_{xa}, f_{zb}]$, que en la figura se han calculado siguiendo la regla general de aplicar al nudo los momentos y fuerzas de empotramiento de la(s) barra(s) cambiados de signo, sin olvidar añadir las posibles acciones directamante aplicadas a los nudos que pudieran existir.

Como se ve al escribir las ecuaciones de equilibrio, en las mismas aparece el esfuerzo N_{ab} del dintel, que por lo tanto debe incluirse en el vector de solicitaciones $\mathbf{s}^t=[m_1, m_2, m_3, N_{ab}]$, puesto que éste se obtiene precisamente reuniendo todos los esfuerzos de las barras que intervienen en aquéllas ecuaciones.

La matriz de equilibrio **H** se obtiene simplemente formando una matriz de tantas filas como ecuaciones de equilibrio y tantas columnas como términos de **s**, y asignado a los términos de la matriz los coeficientes de cada término de **s** en cada una de las ecuaciones citadas, de manera que éstas adopten la forma general $\mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{s}$

El vector de deformaciones es $\mathbf{e}^t=[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta L]$, como se deduce de sumar los trabajos $m_1\cdot\varphi_1+m_2\cdot\varphi_2+m_3\cdot\varphi_3+N_{ab}\cdot\Delta L$ e identificar la expresión obtenida con $W_{int}=\mathbf{s}^t\cdot\mathbf{e}$.

Las ecuaciones de compatibilidad son $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, obteniéndose **B** por transposición de **H**. En la figura se interpretan geométricamente estas ecuaciones, que posteriormente se estudian también con más detalle.

Para acabar de resolver el problema, simplemente basta con escribir la matriz constitutiva **D**, tomando para el soporte la rigidez $3EI_s/H$ (barra con extremo articulado), para los momentos m_2 y m_3 del dintel la matriz estándar de flexión 4-2-2-4, y para N_{ab} la rigidez axil EA_s/L, tal como se dedujo en el apartado anterior.

Las operaciones matriciales habituales:

$$\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{f},\ \mathbf{s}=\mathbf{s_f}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$$

seguidas de la representación de diagramas de esfuerzos y de la deformada, completan el proceso de resolución, que se detalla en la figura. Como siempre, deben realizarse comprobaciones de coherencia de la deformada y de equilibrio general de la estructura y de sus nudos y elementos, algunas de las cuales se indican en la misma figura.

Los resultados obtenidos confirman las previsiones inicialmente formuladas en este apartado, tanto en lo relativo a la forma del diagrama de flectores como en que respecta a los elevados valores de los desplazamientos, que respetan justamente los límites menos exigentes aplicables en estructuras de edificación (estos límites se dan para estructuras metálicas en la norma española EA95 y en el Eurocódigo 3). Los desplazamientos calculados serían totalmente inaceptables en caso de existir elementos constructivos rígidos dañables por deformación. Aún bajo dicha hipótesis, la especificación en el proyecto de una contraflecha de ejecucion apropiada sería en este caso indispensable.

Este mismo ejemplo sirve para introducir un concepto importante para cualquiera de los métodos de análisis que por uno u otro procedimiento desembocan en un sistema de ecuaciones del tipo $\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}$. Se trata del posible "mal condicionamiento" de la matriz de rigidez **K**. Puesto que dicho formato es hoy el estándar en el software de análisis de estructuras, puede afirmarse que casi cualquier programa de análisis puede fallar para estructuras "mal condicionadas", y que en determinadas circunstancias el programa puede no detectar que se están obteniendo resultados incorrectos.

Ello constituye un ejemplo de las muchas razones por las cuales una intuición clara del comportamiento y forma de trabajo de las estructuras, junto con las diversas comprobaciones cualitativas y cuantitativas del análisis, sobre las cuales tanto se ha insitido en estas lecciones, son absolutamente necesarias para que el empleo de los programas de análisis de estructuras no pueda entrañar un riesgo similar al del uso de un vehículo sin el conocimiento de las más elementales reglas de conducción.

Este peligro de "mal condicionamiento" es consustancial a la implementación del método de la rigidez en ordenador digital, y se produce cuando la matriz de equilibrio es cuasi singular, $\det(\mathbf{K})\approx 0$, de tal forma que las rutinas de solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}$ no produzcan una señal de error, aun cuando sus resultados sean incorrectos.

Esta situación puede encontarse cuando en el ensamblaje de la matriz **K** se combinan rigideces enormemente dispares de los diferentes elementos que integran la estructura. En tal caso, como el número de digitos significativos que se almacenan en memoria para cada uno de los coeficientes K_{ij} es, naturalmente, limitado, puede suceder que se pierdan las contribuciones de uno o varios elementos a un mismo coeficiente K_{ij} si son mucho menores en valor absoluto que una de ellas, de tal forma que debieran sumarse a cifras decimales que más allá de la posición duodécima o decimosexta, sencillamente no se almacenan. Sin llegar a este extremo, también puede suceder que aun formándose correctamente todos los términos de **K**, sin embargo los efectos de uno o varios de los elementos invulocrados se perdieran en las manipilaciones artméticas necesarias para que el ordenador resuelva el sistema de ecuaciones $\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}$

El mal condicionamiento es particularmente probable si un elemento o constante de rigidez muchísmo

más elevada que el resto no se une directamente a la cimentación, sino a través de otros elementos mucho más flexibles. Todo usuario de software de análisis de estructuras debería conocer el riesgo de mal condicionamiento en tal caso.

Por ejemplo, en el pórtico de la figura, la rigidez axil EA/L del dintel puede ser numéricamente muy superior a las rigideces de flexión del dintel y/o del soporte. Al efectuar el producto $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$, aparecen por ejemplo para el soporte términos del tipo $3EI_s/H^3$; dividiendo EA/L por el anterior valor, se encuentra el cociente adimensional siguiente:

$$\frac{A_v H}{3 A_s L} \lambda^2,$$

siendo $\lambda = H/i_s$=esbeltez del soporte en el plano del pórtico (i_s=radio de giro=$\sqrt{I_s/A_s}$. En el ejemplo λ^2 es superior a 1000, lo que muestra que las rigideces axil y de flexión pueden ser muy dispares entre sí. Para órdenes de 1000 y aún muy superiores es improbable que se produzca mal condicionamiento de la matriz de rigidez del sistema. Pero si se adoptase una rigidez EA/L ficticia muy superior a la real, se estaría incumpliendo la regla de "no conectar directamente a la cimentación rigideces muy elevadas" (la rigidez axil del dintel) a través de otras mucho más flexibles (la rigidez de flexión del soporte), con un riesgo claro de mal condicionamiento numérico.

Por lo tanto no debe pretenderse en el problema de la figura 2.14 simular la "hipótesis de inextensibilidad" del dintel introduciendo datos ficticios EA/L anormalmente elevados.

Respetando esta sencilla e importante regla, el procedimiento de análisis indicado en la figura resulta más apropiado y sencillo que la introducción de la "hipótesis de inextensibilidad" del dintel. Ésta puede derivarse como una ligadura de los desplazamientos u_a y v_b impuesta por la cuarta ecuación de compatibilidad (cuarta fila de $\mathbf{e}=\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$) tomando en la misma ΔL "exactamente" igual a cero:

$$\Delta L = u_a \cdot cos(\alpha) - v_b \cdot sen(\alpha) = 0$$

$$u_a = v_b \cdot tg(\alpha)$$

Esta condición permite considerar u_a como variable dependiente de v_b (o al revés), y por lo tanto reducir a dos el número de grados de libertad efectivos, en lugar de los tres iniciales.

Además de lo anterior, el esfuerzo N_{ab} se elimina de las ecuaciones de equilibrio simplemente sumando la tercera más la segunda multiplicada por tg(α), como puede comprobarse.

Para mantener en todo momento la simetría entre la formulación estática y cinemática del problema, es conveniente plantear las ligaduras de la forma siguiente:

- Escribir el cambio de variables cinemáticas: $\mathbf{u}=\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}'$, siendo en este ejemplo:

$$\mathbf{u}^t = [\theta_a, u_a, v_b], \ \mathbf{u}'^t = [\theta_a, v_b]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & tg(\alpha) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

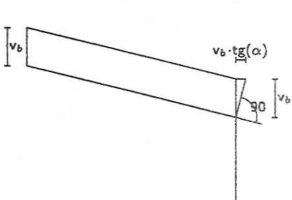
como se comprueba simplemente efectuando el producto matricial $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}'$

- Reducir el número de ecuaciones de equilibrio en la forma:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{f} = \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$$

Con ello, lo que se está haciendo en este caso simplemente es eliminar N_{ab} de las ecuaciones de equilibrio de la manera antes indicada sumando la tercera más la segunda multiplicada por tg(α), como puede comprobarse directamente realizando el producto matricial $\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$.

ΔL

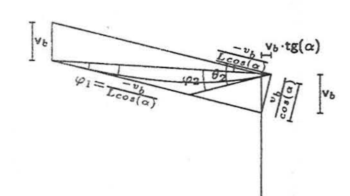


$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \Delta L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{sen(\alpha)}{L} & -\frac{cos(\alpha)}{L}\\ 1 & -\frac{sen(\alpha)}{L} & -\frac{cos(\alpha)}{L}\\ 1 & \frac{1}{H} & 0\\ 0 & cos(\alpha) & -sen(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_a\\ u_a\\ v_b\end{bmatrix}$$

Última fila:

$$\Delta L = u_a \cdot cos(\alpha) - v_b \cdot sen(\alpha)$$

ΔL=0



$$\Delta L = 0 = u_a \cdot cos(\alpha) - v_b \cdot sen(\alpha)$$

$$u_a = v_b \cdot tg(\alpha)$$

Cambio de variables

$$\theta_a=\theta'_a \quad v_b=v'_b \quad u_a=v'_b \cdot tg(\alpha)$$

$$\begin{bmatrix}\theta_a\\ u_a\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & tg(\alpha)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\theta'_a\\ v'_b\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}'$$

Interpretación geométrica

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \Delta L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{sen(\alpha)}{L} & -\frac{cos(\alpha)}{L}\\ 1 & -\frac{sen(\alpha)}{L} & -\frac{cos(\alpha)}{L}\\ 1 & \frac{1}{H} & 0\\ 0 & cos(\alpha) & -sen(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_a\\ v'_b \cdot tg(\alpha)\\ v'_b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \Delta L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{L\,cos(\alpha)}\\ 1 & \frac{-1}{L\,cos(\alpha)}\\ 1 & \frac{tg(\alpha)}{H}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_a\\ v'_b\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}' = \mathbf{B}''\cdot\mathbf{u}'$$

$$\mathbf{B}''=\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$$

Variables

Nudos

θ'_a m_a

v'_b f'_{zb}

Barras

φ_1 m_1

φ_2 m_2

φ_3 m_3

$$\mathbf{u}'=\begin{bmatrix}\theta'_a\\ v'_b\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'=\begin{bmatrix}m_a\\ f'_{zb}\end{bmatrix} \quad \mathbf{e}'=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}'=\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\\ m_3\end{bmatrix}$$

EQU, ECO

$$H'=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \frac{-1}{cos(\alpha)L} & \frac{-1}{cos(\alpha)L} & \frac{tg(\alpha)}{H}\end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0\\ 0 & 0 & \frac{3EI_c}{H}\end{bmatrix}$$

COM

$$B'=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{L\,cos(\alpha)}\\ 1 & \frac{-1}{L\,cos(\alpha)}\\ 1 & \frac{tg(\alpha)}{H}\end{bmatrix}$$

$$B''=\begin{bmatrix}B'\\ 0\end{bmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{K}'=\mathbf{B}'^t\cdot\mathbf{D}'\cdot\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{K}'=\mathbf{B}''^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}''$$

$$\mathbf{K}'=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$$

$$\mathbf{K}'=\begin{bmatrix}26820 & -1506\\ -1506 & 599.1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'=\mathbf{K}'^{-1}\cdot\mathbf{f}'=\begin{bmatrix}0.005012\\ 0.06268\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}'=\mathbf{D}'\cdot\mathbf{B}'\cdot\mathbf{u}'=\begin{bmatrix}-110.9\\ -80.81\\ 120.8\end{bmatrix}$$

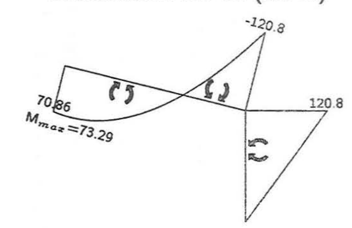
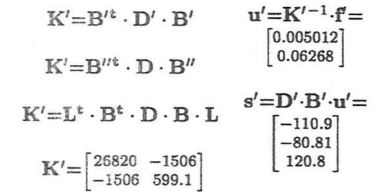
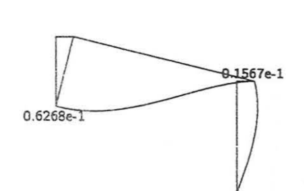


Diagrama de M (kN m)



Desplazamientos (m)



Acciones nodales

$$W_{ext}=\mathbf{u}^t\cdot\mathbf{f}$$
$$=\theta_a\cdot m_a + u_a\cdot f_{xa} + v_b\cdot f_{zb}$$
$$=\theta'_a\cdot m_a + v_b\cdot tg(\alpha)\cdot f_{xa} + v_b\cdot f_{zb}$$
$$=\theta'_a\cdot m_a + v_b\cdot (tg(\alpha)\cdot f_{xa} + f_{zb})$$
$$=\mathbf{u}'^t\cdot [m_a, tg(\alpha)\cdot f_{xa} + f_{zb}]^t$$

$$\mathbf{f}'=[m_a, tg(\alpha)\cdot f_{xa} + f_{zb}]^t$$
$$\mathbf{f}'=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{f}$$

Cambio de variables alternativo:

Se toma u_a como parámetro independiente

$$v_b = \frac{u'_a}{tg(\alpha)},\ u_a = u'_a,\ \theta'_a = \theta_a$$

$$\begin{bmatrix}\theta_a\\ u_a\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{tg(\alpha)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\theta'_a\\ u'_a\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{f}'=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}'=\begin{bmatrix}m_a\\ f_{xa} + \frac{f_{zb}}{tg(\alpha)}\end{bmatrix}$$

Acciones nodales

$$W_{ext}=\mathbf{u}^t\cdot\mathbf{f}$$
$$=\theta_a\cdot m_a + u_a\cdot f_{xa} + v_b\cdot f_{zb}$$
$$=\theta'_a\cdot m_a + u_a\cdot f_{xa} + \frac{u_a}{tg(\alpha)}\cdot f_{zb}$$
$$=\theta'_a\cdot m_a + u_a\cdot (f_{xa} + \frac{f_{zb}}{tg(\alpha)})$$
$$=\mathbf{u}'^t\cdot\left[m_a, f_{xa} + \frac{f_{zb}}{tg(\alpha)}\right]^t$$

$$\mathbf{f}'=\left[m_a, f_{xa} + \frac{f_{zb}}{tg(\alpha)}\right]^t$$
$$\mathbf{f}'=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{f}$$

Figura 2.15: Condensación de grados de libertad.

Es inmediato comprobar que $\mathbf{f'}=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{f}$ es el cambio "dual" de variables estáticas que mantiene invariante el trabajo virtual $W_{ext}=\mathbf{f}^t\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f'}^t\cdot\mathbf{u}'$.

Al no intervenir ya N_{ab} en las ecuaciones de equilibrio, se puede quitar del vector de solicitaciones, con lo cual éste se reduce: $\mathbf{s}'^t=[m_1, m_2, m_3]$

Las ecuaciones de equilibrio quedan así: $\mathbf{f'}=\mathbf{H}'\cdot\mathbf{s}'$, siendo en este ejemplo:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{Lcos(\alpha)} & \frac{-1}{Lcos(\alpha)} & \frac{tg(\alpha)}{H} \end{bmatrix}$$

Al ser $\mathbf{s'}^t=[m_1, m_2, m_3]$, la matriz constitutiva se reduce a una matriz 3x3 donde intervienen sólo las rigideces de flexión:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI_s}{H} \end{bmatrix}$$

- Realizar las operaciones matriciales habituales con las nuevas matrices y variables:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{H}'^t, \mathbf{K}' = \mathbf{B}'^t \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{B}', \mathbf{u}' = \mathbf{K}'^{-1}\cdot\mathbf{f}', \mathbf{s}' = \mathbf{s}'_\mathbf{f} + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{u}'$$

Aunque interesante como ejercicio teórico, es obvio que este proceso es menos simple que el planteado inicialmente, por lo que resulta poco práctico. Solamente para cálculos puramente manuales, puede ser más ventajoso resolver el sistema de dos ecuaciones $\mathbf{K}'\cdot\mathbf{u}'=\mathbf{f'}$ que el sistema inicial de tres ecuaciones $\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}$. Lo mismo es generalizable para sistema con muchos más grados de libertad, para los que la capacidad y rapidez de los ordenadores actuales ha convertido en obsoletas muchas técnicas de reducción de grados de libertad, que retienen un valor más académico que práctico.

El mayor interés de las expresiones $\mathbf{f'}=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{f}$, $\mathbf{u}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}'$, $\mathbf{K}'=\mathbf{L}^t\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{L}$ es que constituyen un procedimiento perfectamente general para cualquier cambio de variables en el análisis de estructuras, y de hecho engloban como caso particular las ecuaciones estándar del método de la rigidez, $\mathbf{f}=\mathbf{B}^t\cdot\ \mathbf{s}$, $\mathbf{e}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$, $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}$, que pueden así considerarse como una tranformación entre variables estáticas y cinemáticas y rigideces "internas" (**s**, **e**, **D**) y "externas" (**f**, **u**, **K**), con **B** y $\mathbf{B}^t$ como "matrices de paso".

Apéndice A.

$\int_0^L MM^*dx$	M_1	M_1	M_2	M_1, M_2	M_3	M_2	M_3	A, $a=\frac{A}{L}$, M_3
M_1^*	$LM_1M_1^*$	$\frac{1}{2}LM_1M_1^*$	$\frac{1}{2}LM_2M_1^*$	$(\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2)LM_1^*$	$\frac{2}{3}LM_3M_1^*$	$\frac{1}{3}LM_2M_1^*$	$\frac{1}{2}LM_3M_1^*$	$\frac{1}{2}LM_3M_1^*$
M_1^*	$\frac{1}{2}LM_1M_1^*$	$\frac{1}{3}LM_1M_1^*$	$\frac{1}{6}LM_2M_1^*$	$(\frac{1}{3}M_1+\frac{1}{6}M_2)LM_1^*$	$\frac{1}{3}LM_3M_1^*$	$\frac{1}{12}LM_2M_1^*$	$\frac{1}{4}LM_3M_1^*$	$(-\frac{1}{6}a+\frac{1}{3})LM_3M_1^*$
M_2^*	$\frac{1}{2}LM_1M_2^*$	$\frac{1}{6}LM_1M_2^*$	$\frac{1}{3}LM_2M_2^*$	$(\frac{1}{6}M_1+\frac{1}{3}M_2)LM_2^*$	$\frac{1}{3}LM_3M_2^*$	$\frac{1}{4}LM_2M_2^*$	$\frac{1}{4}LM_3M_2^*$	$(\frac{1}{6}a+\frac{1}{6})LM_3M_2^*$
M_1^*, M_2^*	$(\frac{1}{2}M_1^*+\frac{1}{2}M_2^*)LM_1$	$(\frac{1}{3}M_1^*+\frac{1}{6}M_2^*)LM_1$	$(\frac{1}{6}M_1^*+\frac{1}{3}M_2^*)LM_2$	$((\frac{1}{3}M_1^*+\frac{1}{6}M_2^*)M_1+(\frac{1}{6}M_1^*+\frac{1}{3}M_2^*)M_2)L$	$(\frac{1}{3}M_1^*+\frac{1}{3}M_2^*)LM_3$	$(\frac{1}{12}M_1^*+\frac{1}{4}M_2^*)LM_2$	$(\frac{1}{4}M_1^*+\frac{1}{4}M_2^*)LM_3$	$((\frac{1}{6}a+\frac{1}{6})M_2^*M_3+(-\frac{1}{6}a+\frac{1}{3})M_3M_1^*)L$
M_3^*	$\frac{2}{3}LM_1M_3^*$	$\frac{1}{3}LM_1M_3^*$	$\frac{1}{3}LM_2M_3^*$	$(\frac{1}{3}M_1+\frac{1}{3}M_2)LM_3^*$	$\frac{8}{15}LM_3M_3^*$	$\frac{1}{5}LM_2M_3^*$	$\frac{5}{12}LM_3M_3^*$	$(-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3})LM_3M_3^*$
M_2^*	$\frac{1}{3}LM_1M_2^*$	$\frac{1}{12}LM_1M_2^*$	$\frac{1}{4}LM_2M_2^*$	$(\frac{1}{12}M_1+\frac{1}{4}M_2)LM_2^*$	$\frac{1}{5}LM_3M_2^*$	$\frac{1}{5}LM_2M_2^*$	$\frac{7}{48}LM_3M_2^*$	$(\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{12}a+\frac{1}{12})LM_3M_2^*$
M_3^*	$\frac{1}{2}LM_1M_3^*$	$\frac{1}{4}LM_1M_3^*$	$\frac{1}{4}LM_2M_3^*$	$(\frac{1}{4}M_1+\frac{1}{4}M_2)LM_3^*$	$\frac{5}{12}LM_3M_3^*$	$\frac{7}{48}LM_2M_3^*$	$\frac{1}{3}LM_3M_3^*$	$\frac{1}{12}\frac{(-3+4a^2)LM_3M_3^*}{-1+a}$ $a<\frac{1}{2}$
C, $c=\frac{C}{L}$, M_3^*	$\frac{1}{2}LM_1M_3^*$	$(-\frac{1}{6}c+\frac{1}{3})LM_1M_3^*$	$(\frac{1}{6}c+\frac{1}{6})LM_2M_3^*$	$((-\frac{1}{6}c+\frac{1}{3})M_1M_3^*+(\frac{1}{6}c+\frac{1}{6})M_2M_3^*)L$	$(-\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3})LM_3M_3^*$	$(\frac{1}{12}c^2+\frac{1}{12}c+\frac{1}{12})LM_2M_3^*$	$\frac{1}{12}\frac{(4c^2-3)LM_3M_3^*}{-1+c}$ $c<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\frac{(a^2-2a+c^2)LM_3M_3^*}{(-1+c)a}$ $c<a$
1^*	$\frac{1}{8}L^2M_1$	$\frac{1}{16}L^2M_1$	$\frac{1}{16}L^2M_2$	$(\frac{1}{16}M_1+\frac{1}{16}M_2)L^2$	$\frac{5}{48}L^2M_3$ $\frac{5}{384}\frac{L^4q}{EI}$	$\frac{7}{192}L^2M_2$	$\frac{1}{12}L^2M_3$ $\frac{1}{48}\frac{L^3P}{EI}$	$\frac{1}{48}\frac{(-3+4a^2)L^2M_3}{-1+a}$
1^*	$-\frac{1}{2}LM_1$	$-\frac{1}{3}LM_1$	$-\frac{1}{6}LM_2$	$(-\frac{1}{3}M_1-\frac{1}{6}M_2)L$	$-\frac{1}{3}LM_3$ $-\frac{1}{24}\frac{L^3q}{EI}$		$-\frac{1}{4}LM_3$ $-\frac{1}{16}\frac{L^2P}{EI}$	$(\frac{1}{6}a-\frac{1}{3})LM_3$
1^*			$-\frac{1}{3}L^2M_2$ $\frac{1}{3}\frac{L^3P}{EI}$			$-\frac{1}{4}L^2M_2$ $\frac{1}{8}\frac{L^4q}{EI}$		
$\int_0^L MM^*dx$			P, PL		q $M_3=\frac{qL^2}{8}$	q $M_2=-\frac{qL^2}{2}$	P $M_3=\frac{PL}{4}$	P

Figura A.1. Valores de integrales que contienen productos.

Apéndice B.

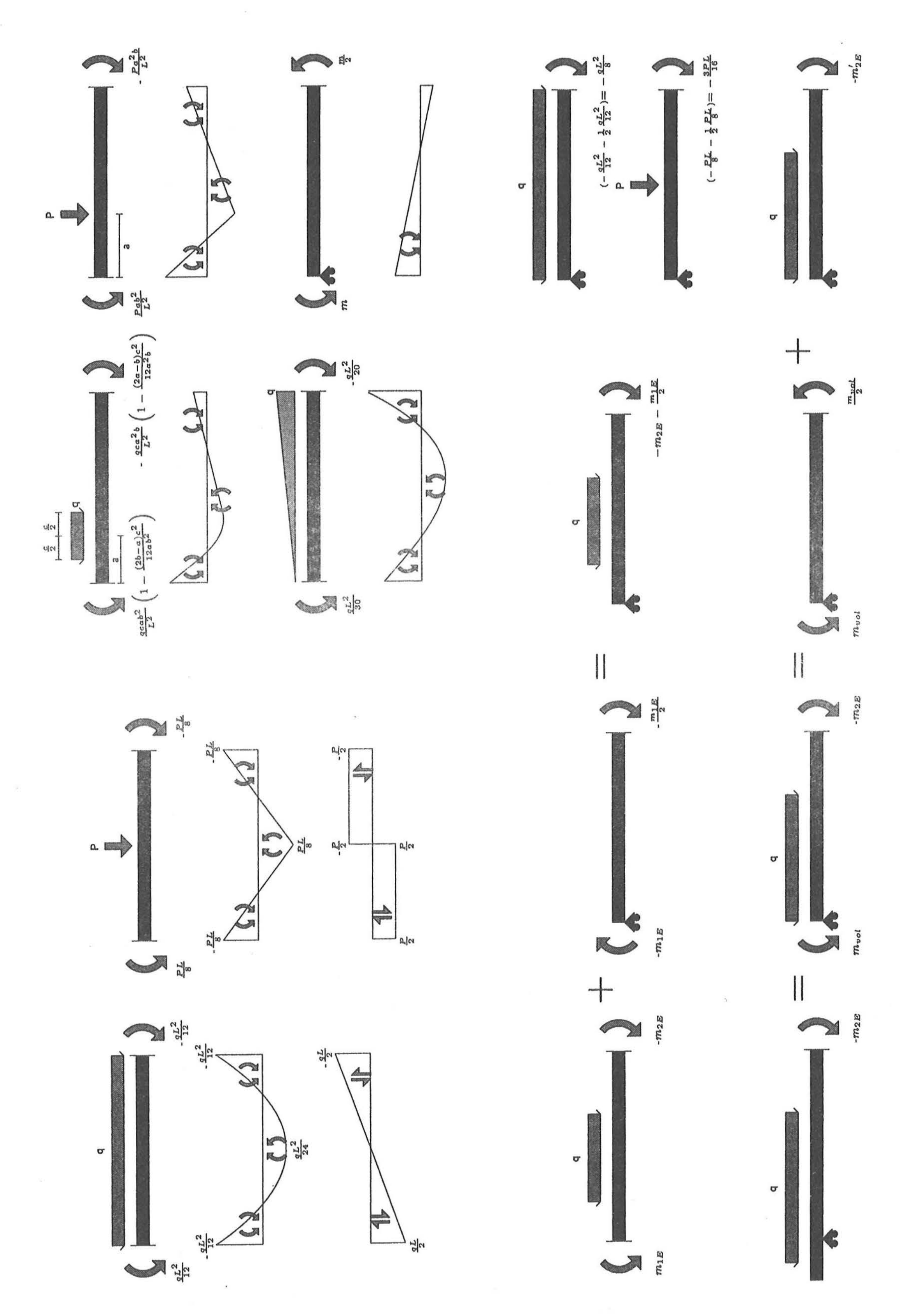


Figura B.1. Vigas hiperestáticas simples. Momentos de empotramiento.

Apéndice C.

BIBLIOGRAFÍA PARA CONSULTA.

- Análisis de secciones y elementos:

  Gere, J.M. y **Timoshenko**, S.P.: "Mecánica de Materiales". G.E.I., 1986

- Resumen de estática gráfica. Estructuras Trianguladas. Métodos clásicos de cálculo de pórticos:

  Timoshenko, S.P., y **Young**, J.M. : "Teoría de las Estructuras". Ed. Urmo, 1975

- Métodos de cálculo elástico:

  Livesley, R. K. : "Métodos matriciales para cálculo de estructuras". Ed. Blume, 1970.

  West, H.H.: "Analysis of Structure". Wiley, 1989.

- Métodos de cálculo plástico:

  Baker, J., **Heyman**, J.: "Plastic Design of Frames". Cambridge, 1969

- Colección de ejercicios resueltos:

  "Prácticas resueltas de **Análisis de Estructuras** de cursos anteriores. http@www.aq.upm.es/ee/e96-380"

Índice General

Índice de Figuras

NOTAS

CUADERNO

87.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

